Systematisches Handbuch

der gesammten

Land- und Erd-Messung

mit

ebener und sphärischer Trigonometrie

auch

Beschreibung

der neuern brauchbaren Meßinstrumente

von

August Schulz Montanus

Doctor Philos., Math. et Phys.

Erster Band.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin,

bei August Rücker.

1819.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

G84/3810

Vorrede.

Nur einige kurze Bemerkungen erlaube ich mir diesem Werke voraus zu schicken, da weitläufige Vorreden, meistens bloß captationes benevolentiae, den Lesern nichts nützen, und deshalb gewöhnlich von ihnen überschlagen werden.

Den Inhalt und die Tendenz dieses von mir mit Lust und Liebe ausgearbeiteten Werkes bezeichnet sein Titel. Nach mehrjährigen Meditationen und practischen Uebungen in geodätischen Arbeiten habe ich es unternommen, alle wirklich brauchbaren, — nicht bloß theoretischen, — Sätze und Aufgaben der Land- und Erd-Messung in ein wissenschaftliches wohlgeordnetes System zusammenzustellen, so weit dieser Gegenstand einer systematischen Darstellung empfänglich ist.

Seit Mayer's practischer Geometrie in 4 Bänden, einem trefflichen und in seiner Art einzigen Werke, ist in Deutschland kein ähnliches Buch erschienen, welches die ganze niedere und höhere Erd-

messungskunde umfaßte. Die vielen über ökonomische und militärische Feldmeßkunst geschriebenen, zum Theil recht brauchbaren Schriften haben insgesammt beschränktere Zwecke, können daher als geschlossene Systeme der ganzen Geodäsie durchaus nicht angesehen werden. Ueber einzelne Theile der höhern Erdmessung hat man zwar einige gute Werke, unter denen sich besonders die Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung von Bohnenberger auszeichnet; allein sie stehen isolirt da, und bilden, wie gesagt, kein Ganzes.

Selbst Mayer's sonst reichhaltigem Werke fehlt es sehr an systematischer leicht zu übersehender Anordnung. Auch enthält dasselbe viele Dinge, welche wohl im Allgemeinen zur practischen Geometrie, aber nicht zur Erdmessung streng genommen gehören, und selbst das Nöthige nicht in bündiger Kürze und Klarheit, nicht immer in der zweckmäßigsten Zusammenstellung. Ferner vermißt man darin viele Sätze, Aufgaben und Methoden der Meßkunde, welche heut zu Tage in einem wissenschaftlichen Werke der Art nicht mehr fehlen, und einem practischen Geometer, welcher Belehrung sucht, nicht mehr vorenthalten werden dürfen. Ich glaube, jeder unpartheiische competente Richter wird meinem Urtheil hierin beipflichten, und eine neuere Bearbeitung der Geodäsie im verbesserten Geiste für kein unnützes Unternehmen halten.

Ich habe bei dieser allerdings schwierigen Ar-

beit einen lange und reiflich erwogenen Plan befolgt, und den erwähnten Mängeln auszuweichen ernstlich getrachtet. Doch bezweifle ich, das mir vorschwebende Ideal, Kürze mit Vollständigkeit und Deutlichkeit zu verbinden, mit wenig Worten viel zu geben, das Unnütze zu übergehen, das Nützliche nirgends zu versäumen, und überall an seine rechte Stelle zu setzen, — vollständig erreicht zu haben. Jedes menschliche Werk ist unvollkommen, das meinige gewiß auch. Hätte ich aber den von mir beabsichtigten Zweck auch nur zur Hälfte erreicht, so würde ich mich selbst dadurch und durch den Beifall derer, die durch meine Belehrung auf rechte Wege geleitet worden, für meine Anstrengung genugsam belohnt finden.

Es ist dies Werk nicht bloß für Anfänger bestimmt, welche sich dadurch von den ersten Elementen der Feldmeßkunst allmählig bis zur höhern Erdmessung fortarbeiten können, sondern auch für solche junge Geometer, welche die gemeine Feldmeßkunst schon kennen, und ihr Wissen nicht bloß berichtigen und vervollständigen, sondern auch extensive bis zur höhern Erdmessung erweitern wollen.

In der Voraussetzung, daß alle, die sich dieses Buch anschaffen, eines oder einige der bessern bereits vorhandenen Lehrbücher der niedern Landmessung (Feldmeßkunst) schon besitzen, habe ich mehrere ganz leichte Gegenstände, z. B. die Anfertigung und den Gebrauch verjüngter Maaßstäbe, die An-

gabe der Meilen- und Flächen-Maße u. s. w. ganz übergangen, andere mit Hinweisung auf einfache Aufgaben nur kurz angedeutet, z. B. die Ausmessung kleinerer Erdstrecken zu ökonomischem oder militärischem Gebrauch. Damit habe ich mehr Platz gewonnen für das Schwierigere und weniger Bekannte. Mit dieser nothwendigen Beschränkung werden hoffentlich die meisten meiner Leser recht wohl zufrieden seyn.

Die ebene und sphärische Trigonometrie durfte als Hauptfundament der Geodäsie hier nicht fehlen; die reine Geometrie und Arithmetik aber mußte ich bei allen meinen Lesern als bekannt voraussetzen. Kenner werden wahrscheinlich meine Darstellung der ebenen, besonders der sphärischen Trigonometrie ihres Beifalls werth achten. Zu letzterer hat die Verlags-Buchhandlung eigne Modelle nach meiner Angabe anfertigen lassen. Diese erleichtern das Verstehen der allgemein für schwer geachteten und von den meisten Schriftstellern, selbst Kästner, Karsten u. a. ziemlich unverständlich behandelten, sphärischen Trigonometrie ganz außerordentlich.

Von den Meßinstrumenten habe ich nur die besten und brauchbarsten beschrieben. Wer diese kennt, und mit ihnen umzugehen versteht, dem wird auch die Behandlung anderer älterer Instrumente nicht schwer fallen.

Der letzten, nemlich der sechsten Abtheilung dieses Werkes, welche von der höhern Erdmessung han-

delt, habe ich die große Ausdehnung nicht geben können, wie ich wohl gewünscht hätte. Aber auch das hier Beigebrachte wird den meisten Lesern zu einer allgemeinen Kenntniß des Gegenstandes völlig genügen, da doch nur Wenige Gelegenheit finden, höhere Erdmessungen wirklich practisch auszuführen.

Sollte indessen mein Werk den gewünschten und gehofften Beifall beim gelehrten Publikum finden, so würde ich diesen zwei Bänden noch einen dritten nachfolgen lassen, worin ich einige practische Vortheile der niedern und höhern Erdmessung ausführlicher mittheilen, und zugleich die verschiedenen Methoden der Chartenzeichnung auseinander setzen würde. Die Chartenzeichnung war kein integrirender nothwendiger Bestandtheil dieses Buches, welches bloß die Methoden der Messungen plangemäß behandeln sollte.

Ein Weiteres über die innere und äußere Oekonomie meines Buches wird der geehrte Leser aus der Ansicht desselben selbst wahrnehmen. Für vorzüglichen Druck, richtige Kupfertafeln ꝛc. hat die Verlagshandlung und die Buchdruckerei des Herrn Friedrich Vieweg in Braunschweig mit löblichem Eifer gesorgt. Der Sachkenntniß und gefälligen Aufmerksamkeit des Herrn Correctors — wegen Entfernung vom Druckort konnte ich die Correctur nicht selbst besorgen — habe ich die Reinheit des Ganzen von groben sinnentstellenden Druckfehlern zu verdanken; die wenigen noch gebliebenen sind insgesammt

von der Art, daß ein aufmerksamer Leser sie auf den ersten Anblick bemerken und selbst verbessern kann.

Mit den Figuren zum Text mußte ich sparsam haushalten, doch fehlt hier nichts von Bedeutung. Wo ich zuweilen Figuren sehr klein oder in etwas unverhältnißmäßigen Proportionen, wie z. B. diejenigen für Meßtischaufnahmen. entwerfen mußte, da wird der Leser durch etwas größere und besser proportionirte Zeichnungen auf einem Bogen Papier sehr leicht nachhelfen.

Dieser erste Band enthält die ebene und sphärische Trigonometrie und die Beschreibung der Meßwerkzeuge, als Grundlagen der ganzen Erdmessung. Im zweiten Band folgen erstlich ein wissenschaftliches für sich abgesondertes System der einfachern Probleme und Methoden der Meßkunst, sodann die wirkliche Praxis der niedern Landmessung und endlich in der sechsten Abtheilung die Praxis der höhern Erdmessung.

Berlin, im Aprilmonat 1819.

Montanus.

Inhalt

des ersten Bandes.

Erste Abtheilung.

Ebene Trigonometrie.

§. 1. Allgemeine Begriffe — Seite 1
§. 2. Worterklärungen der goniometrischen Linien — 5
§. 3. Größe der goniometrischen Linien — 13
§. 4. Positive und negative Bedeutung derselben — 15
§. 5. Einfache Hauptformeln der Trigonometrie — 23
§. 6. Zusammengesetzte Formeln derselben — 37
§. 7. Abgeleitete Formeln — 44
§. 8. Tabelle trigonometrischer Formeln — 51
§. 9. Berechnung der trigon. Linien in Zahlen — 54
§. 10 bis §. 13. Einfache Lehrsätze der Trigonometrie — 60
§. 14 bis §. 23. Einfache Aufgaben derselben — 71
§. 24. Abgeleitete Aufgaben — 77

Zweite Abtheilung.

Sphärische Trigonometrie.

§. 25. Allgemeine Vorkenntnisse — 81
§. 26. Sphärisches Ergänzungsdreieck — 86
§. 27 bis §. 31. Hauptlehrsätze der sphärischen Trigonometrie und Modelle hierzu — 9
§. 32. Versetzungen der sphärisch-trigonometrischen Gleichungen — 100
§. 33. Abgeleitete Formeln — 102
§. 34. Eine zweite Methode der Ableitung — 109
§. 35. Tabelle sphärisch-trigonometrischer Formeln — 113
§. 36. Berechnung rechtwinklichter sphär. Dreiecke, zweideutige Fälle — 115
§. 37 bis §. 43. Berechnung sphär. Dreiecke überhaupt, zweideutige Fälle — 118
§. 44. Flächeninhalt sphärischer Dreiecke — 131
§. 45. Verwandlung der Gradbogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, Bogenlängen — 135

§. 46 bis §. 47. Flächeninhalt sphär. Dreiecke und Polygone S. 137
§. 48 bis §. 51. Reductionen sphär. Dreiecke auf Sehnendreiecke und umgekehrt 140

Dritte Abtheilung.

Werkzeuge zur Land- und Erd-Messung. 148

§. 52. Meßkette und Maßstäbe 149
§. 53. Normallängenmaße, Fuß, mètre ꝛc. 159
§. 54 Vergleichung der Längenmaße 165
§. 55. Tabelle einiger Längenmaße 168
§. 56. Meßtisch, verschiedene Constructionen 171
§. 57. Diopterlineal ohne und mit Fernrohr 182
§. 58. Orientirboußole, Declinatorium 185
§. 59. Diopterkreuz, Feldmesserkreuz 186
§. 60. Verschiedene Gradeintheilungen 188
§. 61. Verschiedene Constructionen der Winkelmesser 191
§. 62. Geometrischer Begriff von der einfachen und doppelten Reflexion (Multiplication) einer Winkelmessung 198
§. 63. Vortheile der Repetition einer Winkelmessung 205
§. 64. Etwas von der Theilung, dem Nonius und der Genauigkeit eines Winkelmessers, Feinheit der Theilstriche 209
§. 65. Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmessers 214
§. 66. Boußole zum Winkelmessen 222
§. 67. Schmalkalders kleine Handboußole 225
§. 68. Libellen mit Luftblase, zwei Arten 227
§. 69. Berichtigung einer Libelle 235
§. 70. Bergwaage, Clitometer 238
§. 71. Astrolabium nach der gewöhnlichen Bedeutung 240
§. 72. Repetirender Theodolit nach der neuesten Construction 244
§. 73. Mayer-Borda'scher Multiplicationskreis 249
§. 74. Theorie des Spiegelsextanten 257
§. 75. Construction des Sextanten 265
§. 76. Gebrauch desselben zu Winkelmessungen 270
§. 77. Messung der Vertikalwinkel mittelst des Sextanten und eines künstlichen Horizonts 277
§. 78. Fehler und Berichtigungen eines Sextanten 285
§. 79. Historische Notiz von einigen andern Winkelmessern mit und ohne Spiegel 293

Instrumente zum Nivelliren: 297

§. 80. Nivellirwaage ohne Libelle, Kanalwaage 298
§. 81. Nivellirwaage mit Fernrohr und Libelle, Niveau 301
§. 82. Berichtigung, Verification des Niveau's 304
§. 83. Nivellirstäbe und Zielscheiben 307

Erste Abtheilung.

Ebene Trigonometrie.

---

§. 1.

Allgemeine Begriffe.

Die meisten Betrachtungen, Messungen und Berechnungen ebener Figuren gründen sich auf die des ebenen geradlinigen Dreiecks, welches insgemein schlechtweg Dreieck genannt wird, zur Unterscheidung vom sphärischen Dreieck.

Das Dreieck ist ein kleines System von sechs zusammengehörigen Größen, 3 Seiten und 3 Winkeln, die nach gewissen Gesetzen von einander abhängen, oder einander wechselseitig bestimmen. Wenn in einem, der Größe und Gestalt nach, gegebenen Dreieck ein Stück, es sey eine Seite oder ein Winkel, sich verändert, so hängt damit immer die Veränderung von einem oder mehreren andern Stücken des Dreiecks nach irgend einer Relation zusammen, die sich durch irgend eine

Funktion *) zusammengehöriger veränderlicher Größen ausdrücken läßt. Ein Beispiel der Art wird später bei Berechnung der Fehler vorkommen, die aus fehlerhaft gemessenen Stücken eines Dreiecks entspringen.

Ein Dreieck wird völlig bestimmt, d. h. die Größe seiner Seiten, Winkel, seines Perimeters und Flächenraums hängt ab von den gegebenen Größen dreier Stücke (Seiten, Winkel), worunter sich aber wenigstens eine Seite befinden muß. Sind nehmlich entweder

a) alle 3 Seiten, oder

b) zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel, oder

c) eine Seite und zwei Winkel in bestimmter Lage gegen die Seite, oder

d) zwei Seiten und ein anliegender stumpfer oder rechter Winkel, welcher nehmlich einer der Seiten gegenüberliegt, gegeben;

so ist das dazu gehörige Dreieck vollkommen bestimmt, oder es läßt sich sowohl durch geometrische Construction als auch durch Rechnung nur ein Dreieck, aber nicht zwei der Größe und Gestalt nach verschiedene Dreiecke, finden, das die gegebenen Stücke nach der gegebenen Bestimmung enthält. Zwei Seiten und ein anliegender spitzer Winkel bestimmen ein Dreieck nur dann, wenn die dem spitzen Winkel gegenüberliegende Seite größer ist, als die anliegende; im Gegentheil lassen sich

---

*) Unter Funktion hat man überhaupt eine Gleichung zu verstehen, welche eine veränderliche Größe durch eine andere veränderliche Größe, in Verbindung mit unveränderlichen Größen ausdrückt; z. B. $y = 2x + 1$ ist eine sehr einfache Funktion; y ist eine Funktion von x, d. h. der Werth von y hängt von dem Zahlenwerthe ab, den man x beliebig geben kann; man kann aber auch x eine Funktion von y nennen.

durch geometrische Construction und durch Berechnung zwei Dreiecke finden, die die gegebenen Eigenschaften besitzen. Drei gegebene Winkel bestimmen ein Dreieck bloß in Hinsicht seiner Aehnlichkeit mit andern Dreiecken und des Verhältnisses seiner Seiten, aber nicht in Hinsicht der Größe seiner Seiten oder seines Flächenraums; folglich bestimmen sie ein Dreieck nicht in der Art, wie es die Praxis verlangt, nehmlich seiner Größe nach. Die Beweise für das Gesagte sind durchaus elementarisch.

Wenn aus 3 in der angezeigten Art gegebenen Stücken eines Dreiecks ein viertes Stück durch Rechnung bestimmt werden soll, so geschieht dies immer nach einer gewissen Formel oder Gleichung, welche eine Funktion der veränderlichen gegebenen und gesuchten Größen ist, d. h. die gesuchte Größe hängt nach einem bestimmten Gesetz von der Quantität der drei gegebenen Größen ab. Verändern sich eine oder mehrere von diesen, so verändert sich auch die gesuchte. Die Unterschiede, welche sich hieraus für das gesuchte Stück und für das Dreieck überhaupt ergeben, lassen sich auf eine allgemeine Art durch Funktionen bezeichnen, welche in unsern mathematischen Lehrbüchern insgemein zu wenig beachtet oder ganz übergangen sind.

Derjenige Theil der analytischen Geometrie, welcher aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen durch Zahlenberechnung finden lehrt, wird allgemein Trigonometrie genannt, und zwar ebene Trigonometrie, zur Unterscheidung von sphärischer Trigonometrie, welche von der Berechnung der Kugeldreiecke handelt, wovon wir in der zweiten Abtheilung sprechen.

Bei dieser Berechnung gebraucht man die sogenannten trigonometrischen Linien, welche den Winkeln des Dreieckes, als Centriwinkeln in irgend einem Kreise,

zugehören, und welche in Theilen dieses Halbmessers, als eines allgemeinen Maßstabes, für jeden Winkel berechnet worden sind, dergestalt, daß diese Linien, in Zahlen gegeben, die Größe der dazu gehörigen Winkel, und umgekehrt, anzeigen. In sofern die Größen dieser Linien von der Größe der dazu gehörigen Centriwinkel abhängen, heißen sie trigonometrische Funktionen der Winkel, so wie man umgekehrt die Winkel Funktionen der trigonometrischen Linien nennen kann.

Die Betrachtung und Berechnung dieser Linien macht eigentlich einen von der Trigonometrie (Dreiecksmessung) ganz abgesonderten unabhängigen Theil der analytischen Kreisrechnung aus, welcher nicht Trigonometrie, sondern Goniometrie genannt werden muß. Die Trigonometrie hat es nur mit Berechnungen der Dreiecke zu thun, und setzt die hierzu nöthigen, den Winkeln in einem Kreise entsprechenden, goniometrischen Linien, in Zahlen gegeben, voraus. Es liegt indessen in der Natur der Sache, und ist schon allgemein im Gebrauche, die Hauptsätze der Goniometrie mit den Lehrsätzen und Aufgaben der Trigonometrie in Verbindung zu setzen, und das Ganze mit dem Namen Trigonometrie zu bezeichnen.

§. 2.

Worterklärungen der goniometrischen Linien. (Fig. 1.)

Wir wollen diese nur mit wenig Worten andeuten, da sie sehr leicht sind.

Mit dem Halbmesser CA, der beliebig lang genommen werden kann, sey ein Kreis beschrieben. Der Bogen AB oder der ihm entsprechende Centriwinkel sey = a, so ist, wenn HC senkrecht auf AC steht, der

Bogen oder Winkel b das Complement (Ergänzung) von a zu einem rechten Winkel. BD sey senkrecht auf AC, eben so AT, welche durch die verlängerte CB in T begrenzt wird; eben so seyen BF und HK senkrecht auf HC.

Der Halbmesser des Kreises heißt der Sinus totus, als ganzes Maß der Einheit;

BD heißt der Sinus vom Bogen oder Winkel a;

DC der Cosinus von a; dieser Name Cosinus, Nebensinus, rührt daher, weil, wie aus der Construction erhellt, DC = BF ist, BF aber dem Sinus von b, dem Ergänzungswinkel von a, gleich ist; dieser Satz, daß der Cosinus eines Winkels dem Sinus seines Ergänzungswinkels, und umgekehrt, gleich ist, gilt für alle Winkel, und bedarf keiner weitern Erklärung;

AT ist die Tangente von a, CT die Secante von a;

HK die Cotangente und CK die Cosecante von a, weil HK die Tangente und CK die Secante von b, dem Ergänzungswinkel von a, sind, welcher Umstand bei Berechnungen wohl zu beachten ist.

AD heißt der Sinus versus (Quersinus) und HF der Cos. vers. von a.

Es ist leicht einzusehen, daß BD, nehmlich der Sinus von a, gleich ist der halben Sehne vom doppelten Bogen oder Winkel, nehmlich $BD = \frac{1}{2}BE$. Da nun sonst die Sehne BE inscripta, also ihre Hälfte BD semissis inscripta hieß, so mag aus der Abbreviatur s. ins. der sonderbare Name Sinus entstanden seyn.

§. 3.

Größe der goniometrischen (trigonometr.) Linien. (Fig. 1.)

Es ist offenbar, daß die geometrische Länge eines Sinus, Cosinus ꝛc. für einen der Länge nach bestimmten Halbmesser oder Sinus totus CA, sich mit dem Winkel, wozu diese Linien gehören, verändern muß; daß ferner zu einem und demselben Winkel a für verschiedene Längen des Halbmessers oder Sinus totus jene Linien verschiedene Längen erhalten, aber im Verhältniß zu ihrem Sin. tot. sich nicht ändern; z. B. für den Halbmesser CB ist BD = Sin. a, für den Halbmesser CT aber wäre AT = Sin. a; da nun AT : CT = BD : CB, so muß, in welche Anzahl Theile man sich auch die Halbmesser oder Sin. tot. zerlegt denken mag, AT eben so viele Theile seines Sin. tot. CT, als BD seines Sin. tot. CB, enthalten. Eben dies gilt von den übrigen goniometrischen Linien: Cosinus, Tangenten u. s. w.

Da nun die Größe dieser Linien bloß nach aliquoten Theilen ihres Sinus totus bestimmt wird, so ist es ganz gleichgültig, wie groß man die Länge des Sin. tot. annimmt, und in wie viel aliquote Theile man sich diese Länge, als allgemeinen Maßstab, zerlegt denkt. Es ist aber natürlich, diese Theilzahl sehr groß anzunehmen, weil sich nur so die verschiedenen Maße der Linien für sehr kleine Fortschreitungen der Winkel angeben lassen. In den gewöhnlichen Sinustafeln wird der Sinus totus = 10 000 000 Theilen gesetzt, und nun für alle Winkel angegeben, wie viel solcher Theile die dazu gehörigen Sinus, Cosinus u. s. w. enthalten. In den Tafeln aber, welche die Logarithmen von den Zahlen dieser Linien enthalten, ist der Sinus totus =

10000 Millionen Theilen gesetzt, woraus sich die große Characteristik dieser Logarithmen erklärt.

Ein andrer, gehörig zu beachtender, Satz der Goniometrie ist dieser: daß zu jeder der Größe oder Zahl nach gegebenen goniometrischen (trigonometrischen) Linie in einem Kreise von irgend einem Halbmesser CA eigentlich 4 verschiedene Winkel gehören. BD sey ein Sinus von bestimmter Größe, so gehört derselbe 1) zum Bogen AB oder Winkel ACB = a, 2) zum Nebenwinkel von ACB, nehmlich zum Winkel BCM = 2R — a, 3) zu dem convexen Winkel ACb = 2R + a, denn indem man den einen Schenkel des Winkels, AC verlängert, und auf diesen vom Endpunkt b des zweiten Schenkel Cb die Senkrechte bd fällt, so erhält man bd = sin. ACb = BD = sin. a, 4) zum convexen Winkel ACE, dessen Bogen AHME = 4R — a ist, nehmlich die Senkrechte ED = sin. (4R — a) = BD = sin. a. Folglich gehört der sin. BD zu 4 Centriwinkeln im Kreise, nehmlich zu a, zu 2R — a, zu 2R + a, und zu 4R — a; z. B. sin. 30° = sin. 150° = sin. 210° = sin. 330°.

Benennt man, wie es mehrere Schriftsteller thun, den Halbkreis mit dem unschicklichen Buchstaben π, so ist:

sin. a = sin. (π — a) = sin. (π + a) = sin. (2π — a).

Was vom Sinus gilt, das gilt auch von jeder andern trigonometrischen, der Größe nach gegebenen Linie. So ist Cos. a = Cos. (2R — a) = Cos. 2R + a) = Cos. (4R — a) u. s. w.

Die weitere ausführlichere Betrachtung dieses ganz leichten Gegenstandes kann auch einem Anfänger nicht schwer fallen. Schwieriger aber, und von den meisten Schriftstellern nicht deutlich genug erläutert ist die Theorie von der positiven und negativen Bedeutung der trigonometrischen Linien, in sofern jede derselben

zu 4 verschiedenen Centriwinkeln gehören kann; daher wir diese Theorie hier so genau als möglich erörtern wollen.

§. 4.

Positive und negative Bedeutung der goniometrischen Linien. (Fig. 1.)

AHML sey ein Kreis über dem Durchmesser AM beschrieben; der Durchmesser HL sey senkrecht auf AM. Werden nun die Winkel vom Anfangspunkte A nach der Richtung AHG ꝛc. wachsend angenommen, und A als der Anfangspunkt der Winkel, so können die goniometrischen Linien in Beziehung auf die Durchmesser AM oder HL entgegengesetzte Lagen annehmen, folglich positive oder negative Zahlenwerthe bekommen.

α) Der Sin. 0^0 ist $= 0$, wächst bis 90^0, dessen Sinus $=$ Sin. tot. ist; über 90^0 nimmt er in gleicher Progression wieder ab, bis er bei $180^0 = 0$; von 180^0 wächst er eben so wieder bis zu 270^0, wo er gleich dem Sin. tot. wird; von hier an bis 360^0 nimmt er wieder ab, so daß Sin. 360^0 wieder $= 0$ wird.

Die Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 behalten gleiche Lagen gegen den Durchmesser AM: man kann AM als Abscissenlinie, die Sinus als Ordinaten, und A als den Anfangspunkt der Abscissenlinie betrachten; folglich sind die Zahlenwerthe der Sinus aller Winkel von 0^0 bis 180^0 positiv: z. B. sowohl BD = sin. BCAM, und Gd = sin. ACG sind beide positiv u. s. w.

Die Sinus der Winkel von 180^0 bis 360^0 hingegen haben Lagen gegen den Durchmesser AM, welche den Lagen der Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 entgegengesetzt sind; folglich sind ihre Zahlenwerthe in Beziehung auf die oberhalb AM fallenden Sinus negativ.

β) Der Cosinus von 0^0 = sin. tot., nimmt ab bis zu 90^0, wo er = 0 wird; über 90^0 nimmt er in gleicher Progression wieder zu, bis er bei 180^0 = sin. tot. wird; von 180^0 bis 270^0 nimmt er eben so wieder ab bis zum Verschwinden; von 270^0 wächst er bis zu 360^0, wo er wieder = sin. tot. wird.

Die Cosinus sind in Hinsicht ihrer Lage gegen den Durchmesser HL, auf welchem sie als senkrechte Ordinaten stehen, gleichsam das Gegentheil von den Sinus. Die Cosinus, welche in den Halbkreis HAL fallen, sind daher als positiv, die Cosinus hingegen, die auf die entgegengesetzte Seite von HL oder in den Halbkreis HML fallen, als negativ zu betrachten. Nehmlich die Sinus von 0^0 — 90^0 sind positiv, von 90^0 bis 180^0 negativ, von 180^0 — 270^0 negativ, von 270^0 bis 360^0 positiv; z. B. DC = BF = cos. BCA positiv, Cd = FG = cos. ACG negativ u. s. w.

γ) Die Tangente von 0^0 = 0, wächst bis 90^0, wo sie = ∞ (unendlich) wird, oder besser gesagt, wo sie eigentlich aufhört, eine Größe zu seyn, wie aus der geometrischen Construction erhellt; über 90^0 hinaus wird sie wieder eine endliche Größe, und nimmt ab, bis sie bei $180^0 = 0^0$ wird; von 180^0 bis 270^0 nimmt sie wieder zu, bis sie bei 270^0 = ∞ wird; über 270^0 wird sie wieder eine endliche Größe, und nimmt allmählig ab, bis tang. 360^0 = 0. Was die Lagen der Tangenten gegen den Durchmesser AM betrifft, so sind diejenigen Tangenten positiv, welche auf AM oberhalb in der Richtung AT, diejenigen aber negativ, welche auf AM unterhalb in der Richtung At senkrecht stehen. Ist A der Anfangspunkt der Winkel oder Bogen, so müssen die Tangenten alle in A auf AM senkrecht stehen, und so weit verlängert werden, bis sie vom zweiten Schenkel des Winkels CB oder CG u. s. w., wenn CA der erste Schenkel ist, vor-

wärts oder rückwärts verlängert, geschnitten werden. Hält man diesen Begriff nicht fest, so kann man die positive und negative Bedeutung der Tangenten nicht wohl einsehen.

Es sey A C B ein spitzer Winkel oder kleiner als 90^0, so ist seine Tangente A T positiv, und so sind alle Tangenten von Winkeln unter 90^0 positiv, die Tangente von 90^0 aber $= +\infty$.

Es sey A C G ein stumpfer Winkel zwischen 90^0 und 180^0; um seine Tangente zu erhalten, muß man den zweiten Schenkel des Winkels G C rückwärts verlängern, bis er die Senkrechte auf A M in t schneidet; folglich At = tang. A C B negativ, weil sie gegen AM eine den positiven Tangenten z. B. A T entgegengesetzte Lage hat; auf diese Weise sind die Tangenten aller stumpfen Winkel, die größer als 90^0 und kleiner als 180^0 sind, negativ.

Es sey der Bogen A H M b oder der convexe Winkel A C b größer als 180^0 und kleiner als $270^0 = 2R + a$; seine Tangente A T wird erhalten, indem man den zweiten Schenkel des Winkels C b rückwärts verlängert, bis er die Senkrechte auf A M in T schneidet; also ist A T = tang. A C b positiv, weil sie auf die Seite von A M fällt, die den positiven Tangenten entspricht; auf diese Weise sind die Tangenten aller Winkel von 180^0 bis 270^0 positiv.

Es sey der Bogen A H M E oder der dazu gehörige convexe Winkel A C E größer als 270^0 und kleiner als 360^0, oder $= 4R - a$; so ist offenbar A t die Tangente vom convexen Winkel A C E; diese ist zwar an Größe = A T oder tang. a, aber in Hinsicht ihrer Lage gegen A M negativ, wenn A T positiv ist; demnach sind die Tangenten aller Winkel zwischen 270^0 und 360^0 negativ.

δ) Die Cotangente von 0^0 = tang. 90^0 = ∞, nimmt ab bis 90^0, wo sie gleich der tang. 0^0 = 0 wird; über 90^0 hinaus nimmt sie wieder zu, und wird bei 180^0 wieder = ∞ u. s. w.

Die Cotangenten sind, wie man leicht erkennt, in Hinsicht ihrer Lagen gegen den Durchmesser HL, auf welchem sie senkrecht stehen, gleichsam das Gegentheil der Tangenten, welche auf dem Durchmesser AM senkrecht stehen, so wie wir dies vorher von den Cosinus und Sinus der Winkel bemerkten; der wahre positive Anfangspunkt oder Nullpunkt der Cotangenten ist eigentlich H, diejenigen, welche in die Richtung CA oder vielmehr HK fallen, müssen positiv, diejenigen aber, welche in die entgegengesetzte Richtung CM oder vielmehr Hk fallen, negativ seyn.

Der Winkel ACB = a sey ein spitzer, so ist seine Cotangente = der Tangente von b = HK, also positiv; dergestalt sind die Cotangenten aller Winkel zwischen 0^0 und 90^0 positiv.

Die Cotangente des stumpfen Winkels ACG = 2R — a = cot. a = tang. 90^0 — a ist, wie man leicht sieht, Hk, welche an Größe der cot. a zwar gleich, aber wegen ihrer entgegengesetzten Lage gegen den Durchmesser HL negativ ist; auf diese Weise sind die Cotangenten aller Winkel von 90^0 bis 180^0 negativ.

Der Bogen AHMb oder der convexe Winkel ACb = 2R + a liege zwischen 180^0 und 270^0, so ist dessen Tangente = AT, also seine Cotangente HK positiv; man kann sich auch statt cot. ACb für den Durchmesser AM die tang. ACb für den Durchmesser HL vorstellen, so wird diese, wie oben bei den Tangenten gezeigt wurde, = tang. b nehmlich HK als positiv; auf diese Weise sind die Cotangenten aller Winkel von 180^0 bis 270^0 positiv.

Der Bogen AHME oder der zugehörige convexe Winkel ACE = 4R — a falle zwischen 270° und 360°, so läßt sich durch eine ganz ähnliche Schlußfolge, wie vorher, zeigen, daß die hiezu gehörige Cotangente Hk ist, welche an Größe zwar = KH = cot. a ist, aber gegen den Durchmesser HL eine entgegengesetzte Lage hat, und also negativ genommen werden muß; dergestalt sind die Cotangenten aller Winkel von 270° bis 360° negativ.

ε) Die Secante von 0° = sin. tot., wächst bis 90°, wo sie = ∞ wird, oder aufhört, eine Größe zu seyn, — Secanten und Cosecanten können nicht, wie die übrigen goniometrischen Linien, als Null zum Verschwinden kommen —; über 90° hinaus wird sie wieder eine endliche Größe, und nimmt ab bis zu 180°, wo sie wieder = sin. tot. wird, u. s. w. durch den 3ten und 4ten Quadranten des Kreises.

Was die positive und negative Bedeutung der Secanten anlangt, so hat die Erklärung derselben aus ihrer Lage gegen eine gewisse Linie mehr Schwierigkeit. Nehmen wir A als den Anfangspunkt der Winkel, C#A als den ersten Schenkel derselben an, so werden nach der Erklärung der bessern Schriftsteller diejenigen Secanten positiv, welche in der Richtung des zweiten Schenkels, vom Mittelpunkt des Kreises an gegen den Durchschnittspunkt in der Peripherie hin, oder vorwärts verlängert, die Tangente des Winkels schneiden, diejenigen hingegen negativ, welche in der Richtung des zweiten Schenkels, rückwärts verlängert, die Tangente des Winkels schneiden. Folglich geben hier die entgegengesetzten Richtungen des zweiten Schenkels der Winkel vom Mittelpunkt des Kreises aus genommen, den Grund für die positive und negative Bedeutung der Secanten.

Es sey ACB ein spitzer Winkel, so ist dessen Se-

cante CT, weil sie in die Richtung CB von C nach B hin fällt; dem zufolge sind die Secanten aller Winkel von 0^0 bis 90^0 positiv.

Es sey ACG ein stumpfer Winkel $= 2R - a$, so ist dessen Tangente At, also seine Secante $Ct = CT = \text{Sec. } a$; diese Secante Ct ist negativ, weil sie in die Richtung des rückwärts verlängerten Schenkels CG fällt; dem zufolge sind die Secanten aller Winkel von 90^0 bis 180^0 negativ.

Es sey der convexe Winkel $ACb = 2R + a$, kleiner als 3 Rechte, so ist seine Tangente AT, also seine Secante CT, also negativ, da CT in die rückwärts verlängerte bc fällt. Es ist also, wie man sieht, $\text{Sec. } (2R + a) = -\text{Sec. } a$; demnach sind die Secanten aller Winkel von 180^0 bis 270^0 negativ u. s. w.

5) Da die Cosecanten der Winkel nichts anders sind, als die Secanten der Complemente oder Ergänzungswinkel jener Winkel zu 90^0, so schreiten sie in umgekehrter Folge der Secanten fort. So wie demnach $\text{sec. } 0^0 = \text{sin. tot.}$, so ist $\cos. 0 = \infty$, $\text{sec. } 90^0 = \infty$, $\cos. 90^0 = \text{sin. tot.}$ u. s. w.

Die positive und negative Bedeutung der Cosecanten kann eben so erklärt werden, wie die der Secanten.

Für den spitzen Winkel ACB ist die Cosecante CK positiv, so wie die Cosecanten aller Winkel von 0^0 bis 90^0.

Für einen stumpfen Winkel $ACG = 2R - a$ ist die Cosecante Ck ebenfalls positiv, so wie die Cosecanten aller Winkel von 90^0 bis 180^0.

Für einen convexen Winkel $ACb = (2R + a) < 3R$ ist die Cosecante CK negativ, so wie die Cosecanten aller Winkel von 180^0 bis 360^0.

Für einen convexen Winkel $ACE = (4R - a) > 3R$

ist die Cosecante Ck negativ, so wie die Cosecanten aller Winkel von 270° bis 360°.

Dies ist im Wesentlichen die Erklärung, welche die vorzüglichern mathemathischen Schriftsteller, z. B. Klügel (Mathem. Wörterb. II. Th. Goniometrie), Pasquich (Mathem. Anal. 1. B.) von der positiven und negativen Zahlenbedeutung der goniometrisch-trigonometrischen Linien gegeben haben; ich habe zum bessern Verständniß für Anfänger einige nähere Erläuterungen zugesetzt. Mehrere andere oder vielmehr die meisten Schriftsteller haben sich diese Sache, wie wir glauben, gegen die wahre Methode, leichter gemacht, indem sie zuerst die Sinus und Cosinus in Hinsicht ihrer positiven und negativen Werthe auf rein geometrischem Wege erklären, und daraus vermittelst analytischer Formeln, die der folgende §. 5 enthält, die positiven und negativen Werthe der übrigen goniometrischen Linien ableiten. Nach diesen ist z. B. $\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a.}}$

Ist nun a ein stumpfer Winkel z. B. 107°, so ist sin. a positiv und cos. a negativ, also ist tang. a $= \frac{+\text{ sin. (2R} - \text{a)}}{-\text{ cos. (2R} - \text{a)}} = -$ tang. (2R — a) oder die Tangente von einem stumpfen Winkel ist negativ u. s. w. Es ist in der That sehr wichtig, die positive und negative Bedeutung der goniometrischen Linien für verschiedene Winkel deutlich einzusehen, wenn man die trigonometrischen Rechnungen, in welche diese Linien eingehen, mit Verstand und Einsicht des Zusammenhangs der Größen, aber nicht ganz sinnlos und mechanisch verrichten will. Nach meiner vieljährigen Erfahrung giebt es unter zehn trigonometrischen Rechnern kaum zwei, welche jenen Gegenstand mit Klarheit und genauen Beweisgründen kennen; solche sind, wenn es

etwas verwickeltere ungewöhnlichere Berechnungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie gilt, immer in Gefahr, Fehler zu begehen. Die mathematischen Wahrheiten müssen sich alle auf genaue strenge Beweise stützen; ein mathematisches Wissen ohne vollkommene Demonstration ist nicht viel besser, als ein andrer blinder orthodoxer Glaube, der nichts weiter für sich hat, als: es steht in diesem oder jenem Buch so geschrieben, oder Der und Der hat es ja so gelehrt.

Die positive und negative Bedeutung der goniometrischen Linien läßt sich nach meinem Ermessen noch auf eine andre, vielleicht genügendere, Weise mittelst des Begriffes von den mathematisch entgegengesetzten (geometrischen oder arithmetischen) Größen erläutern; eine Weise, womit ich meinen Zuhörern, wenn sie die oben gegebene Erklärung nicht völlig befriedigte, wie es wohl mehreren Mathematikbeflissenen begegnen mag, bisher noch immer die vollständigste Ueberzeugung verschafft habe.

Ohne mich hier in eine ausführliche Theorie der entgegengesetzten Größen einzulassen, bemerke ich nur Folgendes: Wenn eine Reihe von geometrischen Größen, die man als eine Zahlenprogression nach irgend einem Gesetz betrachten kann, bis auf o (Stelle des Verschwindens aller Größe) abnimmt, und dann wieder nach einer entgegengesetzten Richtung aufsteigend oder wachsend fortläuft, so ist diese zweite von o an in entgegengesetzter Richtung fortgehende Reihe negativ, wenn die erste bis zu 0^0 abnehmende Reihe positiv heißt, und positiv in einer Rechnung gesetzt wird. Steigt eine solche Reihe von o wachsend bis zu einer endlichen Größe und fällt dann abnehmend wieder bis auf 0, so ist diese ganze Reihe offenbar gleichartig,

wir wollen sie positiv heißen; geht diese Reihe durch o nach einer entgegengesetzten Richtung gegen die Größen der vorigen Reihe, wieder steigend und fallend bis auf o, so ist diese ganze zweite Reihe von o zu o in Beziehung auf die erste negativ. Im Allgemeinen ist es gleichgültig, welche Reihe man die positive nennen will; nimmt man die zweite Reihe als die positive an, so wird die erstere die negative; in einem bestimmten Falle aber, wie bei den goniometrischen Funktionen der Winkel bekommt die eine Reihe immer ihre bestimmte positive Bedeutung durch die bestimmte Lage der Winkel und ihren bestimmten Anfangspunkt. So oft nun eine Reihe durch o (Punkt des Verschwindens) nach einer entgegengesetzten Richtung fortläuft, so oft wechselt sie, wie leicht zu begreifen ist, ihre positive und negative Bedeutung. — Es kann aber auch ein Verschwinden der Größe im Unendlichen geben, d. h. eine wachsende Größenreihe kann so fortlaufen, daß die wachsende Größe zuletzt $= \infty$ (unendlich groß) wird, oder besser und bestimmter gesprochen, aufhört, eine wirkliche Größe zu seyn, wie z. B. tang. $90^0 = \infty$ ist. Streng genommen sind eine Größe $= \infty$ und eine andre Größe $= o$ als absolute Größen betrachtet, gleichbedeutend, nehmlich gar keine Größe. Eine Reihe kommt also zum Verschwinden, sie mag durch die Grenzen o oder ∞ nach entgegengesetzten Richtungen fortlaufen, und wird also in beiden Fällen, wenn sie nach einer der vorhergegangenen Reihe entgegengesetzten Richtung in endlichen Größen wachsend oder fallend weiter fortläuft, negativ, wenn die vorige Reihe positiv gesetzt wird. So oft also eine wachsende Größenreihe durch die Grenze $= \infty$ nach einer entgegengesetzten Richtung fallend fortschreitet, so oft wechselt sie als Zahlenreihe ihre positive und negative Bedeutung. Das hier Gesagte wird selbst ein Anfänger, dem die ersten

Begriffe von den entgegengesetzten Größen nicht fremd sind, ohne Schwierigkeit begreifen.

Die Anwendung dieser unbezweifelt wahren Sätze, von der positiven und negativen Bedeutung der Größenreihen, auf die goniometrisch-trigonometrischen Linien ist sehr leicht.

α) Die Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 stellen eine Zahlenreihe vor, welche vom Nullpunkt bis zur Größe des Sinus totus wächst, und von da wieder bis zu o abnimmt; diese ganze Reihe ist positiv. Die Sinus von 180^0 bis 360^0 bilden eine der vorigen in Zahlen völlig gleiche, von o bis o laufende, Reihe, die aber in Beziehung auf den Kreisdurchmesser AM eine Lage hat, die der Lage der obern Reihe entgegengesetzt ist; ist also diese positiv, so ist die letztere Reihe der Sinus von 180^0 bis 360^0 negativ.

β) Die Cosinus bilden zwei entgegengesetzte Reihen von senkrechten Ordinaten auf dem Durchmesser HL; ihre Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte sind die Nullpunkte H, L; man kann diese Cosinus-Reihen als Sinus-Reihen für den Durchmesser HL ansehen, denn es ist z. B. cos. a eigentlich nicht CD sondern BF = sin. b für den Durchmesser HL als Abscissenlinie u. s. w. Heißt demnach diese Reihe im Halbkreis HAL positiv, so wird die zweite entgegengesetzte Reihe im Halbkreis HML negativ. Daraus folgt, daß, wenn A als Anfangspunkt der Bogen oder Winkel und die Richtung der Bogen von A nach B, H u. s. w. gesetzt wird, die Cosinus von 0^0 bis 90^0 positiv sind; von 90^0 bis 270^0 negativ, von 270^0 bis 360^0 positiv.

γ) Die Tangentenreihen haben zwei verschiedene Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte, zwei-

mahl verschwinden sie als Null, zweimahl als Unendlichgroß. — Unendlichgroß ist eigentlich ein falscher Ausdruck, weil ein sogenanntes Unendlichgroßes schlechterdings aufgehört hat, eine Größe zu seyn, also eben so wenig als Null groß heißen kann; wenn dessenungeachtet solche Nichtgrößen o und ∞ in Formeln der höhern Analysis vorkommen, so dienen sie hier mittelst der Form ihrer Entstehung bloß dazu, um Verhältnisse und Relationen endlicher Größen zu entwickeln. — Da die Tangentenreihe von 0^0 bis 90^0 eine steigende ist, deren letztes Glied bei 90^0 im Unendlichen verschwindet, so geht sie über 90^0 hinaus in das Entgegengesetzte. Sind also die Tangenten von 0^0 bis 90^0 positiv, so sind die Tangenten von 90^0 bis 180^0 negativ; bei 180^0 geht die Reihe durch o in das Entgegengesetzte bis 270^0, also sind die Tangenten von 180^0 bis 270^0 positiv; die Reihe geht bei 270^0 nochmals durch ∞ in das Entgegengesetzte bis 360^0, also sind die Tangenten von 270^0 bis 360^0 negativ.

Eben solche Betrachtungen lassen sich mit der positiven und negativen Bedeutung der Cotangenten, Secanten und Cosecanten anstellen. Die Cotangenten haben, wie die Tangenten, vier Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte, zweimahl als o, zweimahl als ∞; die Secanten und Cosecanten hingegen haben, wie die Sinus und Cosinus, nur zwei solche Durchgangspunkte, beide als ∞, daher geben sie auch nur zwei entgegengesetzte Reihen oder Progressionen.

Nimmt man die beiden gegebenen Erklärungen zusammen, so muß jede Dunkelheit verschwinden, die so mancher Liebhaber der Mathematik in der Bedeutung der goniometrischen Linien finden mag; und wir zwei-

feln sehr, daß sich eine noch bessere Methode werde ausfindig machen lassen, diesen Gegenstand in ein helles Licht zu setzen.

Die Bedeutung der goniometrischen Linien für negative Winkel ist aus der vorhergehenden Erläuterung nun ganz leicht abzuleiten. Ein Bogen AE oder Winkel a' heißt bloß in Beziehung auf einen Bogen AB oder Winkel a negativ, wenn CA der erste Schenkel beider Winkel, oder A der Anfangspunkt beider Bogen oder Winkel ist, und der Winkel a positio gesetzt wird; die Bogen AB und AE laufen nehmlich von A aus nach entgegengesetzten Richtungen, oder die Winkel a und a' haben gegen AC, deren Endpunkt A der Nullpunkt für beide Winkel ist, eine entgegengesetzte Lage. In der Theorie ist es gleichgültig, welchen Winkel nach entgegengesetzten Seiten von CA man positiv und welchen man negativ nennen will. In bestimmten Fällen und practischen Aufgaben wird die positive Lage der Winkel, also auch die negative, jederzeit gegeben; Beispiele von negativen Winkeln kommen übrigens in der Vermessungskunde häufig genug vor, wie wir weiterhin sehen werden.

Ist Sinus von a positiv, so ist Sinus von a' = Sin. — a negativ = — Sin. a, denn BD hat gegen DE in Beziehung auf AM eine entgegengesetzte Lage.

Zum positiven stumpfen Winkel ACG gehört der positive Sinus Gd, zu dem negativen stumpfen Winkel ACb oder Bogen Ab gehört der Sinus bd = — Gd = — Sin. ACb oder ACG. Zu einem negativen spitzen oder stumpfen Winkel gehört also ein negativer Sinus, an absoluter Größe aber = dem Sinus desselben Winkels positiv genommen.

Die Cosinus eines spitzen, positiven sowohl negativen, Winkels sind positiv, z. B. + Cos. a =

+ Cos. a′ = + Cos. — a, nehmlich sowohl BF als Ef positiv; die Cosinus eines stumpfen positiven sowohl als negativen Winkels ACG oder ACb sind negativ, nehmlich sowohl FG als fb positiv.

Die Tangente eines negativen spitzen Winkel a′ = a ist negativ, nehmlich At als Entgegensetzung von AT = tang. a ist negativ. Die Tangente eines negativen stumpfen Winkels ACb ist gleich der Tangente eines positiven Winkels zwischen 180° und 270°, also positiv.

Eben so findet man, daß die Cotangente eines negativen spitzen Winkels negativ, eines negativen stumpfen positiv ist; daß ferner die Secante eines negativen spitzen Winkels positiv, eines stumpfen negativ; die Cosecante eines negativen spitzen Winkels negativ, und eines stumpfen Winkels auch negativ ist.

§. 5.

Einfache Hauptformeln zur Größenbestimmung und Vergleichung der goniometrischen (oder trigonometrischen) Linien. (Fig. 2.)

Mit einem beliebigen Halbmesser CA = r oder = 1 sey ein Kreis beschrieben, der Bogen AB oder der zu ihm gehörige Centriwinkel sey = a, das Complement von a zu 90° = b; so ist BD = sin. a, DC oder vielmehr BG = cos. a, AT = tang. a, EM = cot. a, CT = sec. a, CM = cosec. a, AD = sin. vers. a, EG = cos. vers. a. Nach Sätzen der Elementargeometrie finden unter diesen Linien, als Funktionen eines Winkels a, folgende Gleichungen Statt, man mag für den Halbmesser oder Sinus totus = r

1 oder 10 oder 10000, oder welche Zahl man sonst will, setzen:

I) $\text{Sin.}^2 a + \text{Cos.}^2 a = r^2$ oder $= 1$ für $r = 1$.

Daraus folgt:

$$\sin. a = \sqrt{r^2 - \text{ccs.}^2 a} = \sqrt{1 - \cos.^2 a} \text{ für } r = 1.$$

$$\cos. a = \sqrt{r^2 - \sin.^2 a} = \sqrt{1 - \sin.^2 a}$$

II) Cos. a : sin. a = r : tang. a, also

$$\text{tang. a} = \frac{r \,.\, \sin. a}{\cos. a} = \frac{\sin. a}{\cos. a} \text{ für } r = 1.$$

$$\sin. a = \frac{\cos. a \,.\, \text{tang. a}}{1 \quad r} = \cos. a \,.\, \text{tang. a}$$

$$\cos. a = \frac{r \,.\, \sin. a}{\text{tang. a}} = \frac{\sin. a}{\text{tang. a}}$$

III) Sin. a : cos. a = r : cot. a, weil $\triangle CDB = \triangle CBG \sim \triangle CEM$,

$$\text{also cot. a} = \frac{r \,.\, \cos. a}{\sin. a} = \frac{\cos. a}{\sin. a} \text{ für } r = 1.$$

$$\sin. a = \frac{r \,.\, \cos. a}{\cot. a} = \frac{\cos. a}{\cot. a}$$

$$\cos. a = \frac{\sin. a \,.\, \cot. a}{r} = \sin. a \,.\, \cot. a$$

Da auch $AT : AC = CE : EM$, so ist die Cotangente eines Winkels die dritte Proportionale zu der Tangente und dem Sinus totus.

nehmlich tang. a : r = r : cot. a oder tang a : 1 = 1 : cot. a,

also tang. a . cot. a = r^2 = 1; da auch für einen andren Winkel b

tang. b . cot. b = r^2 = 1,

so folgt daraus: tang. a . cot. a = tang. b . cot. b = 1.

nehmlich das Product der Tangente und Cotangente eines Winkels, welcher Winkel es auch seyn mag, ist eine unveränderliche Größe.

IV) $\text{Cos. a} : r = r : \text{sec. a}$,

$$\text{also sec. a} = \frac{r^2}{\text{cos. a}} = \frac{1}{\text{cos. a}}, \text{ also auch}$$

$$\text{cos. a . sec. a} = 1.$$

Da auch cos. b . sec. b = 1, so sind auch die Producte der Cos. und Sec. für verschiedene Winkel eine unveränderliche Größe.

V) $\text{Sin. a} : r = r : \text{cosec. a}$,

$$\text{also cosec. a} = \frac{r^2}{\text{sin. a}} = \frac{1}{\text{sin a}}, \text{ also auch}$$

$$\text{sin. a . cosec. a} = 1.$$

Da auch sin. b . cosec. b = 1, so sind auch die Producte der Sin. und Cosec. für verschiedene Winkel eine unveränderliche Größe.

VI) $\text{Sin. vers. a} = r - \text{cos. a}$

$\text{cos. vers. a} = r - \text{sin. a}$.

Aus diesen Grundformeln lassen sich mehrere andere sehr leicht ableiten, z. B.

$\text{tang. a . cos. a} = \text{sin. a}$ nach II)

$$\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \frac{\text{sin. a}}{\sqrt{1 - \text{sin.}^2 \text{a}}}$$

$$\text{cot. a} = \frac{\text{cos. a}}{\text{sin. a}} = \frac{\text{cos. a}}{\sqrt{1 - \text{cos.}^2 \text{a}}}$$

$$\text{tang. a} = \frac{1}{\text{cot. a}} \text{ und cot. a} = \frac{1}{\text{tang. a}} \text{ u. s. w.}$$

Aus den angeführten Hauptformeln ersieht man deutlich, daß, wenn einmahl die Sinus und Cosinus

der Winkel berechnet sind, die übrigen Linien, als Zahlengrößen, sich aus jenen bestimmen lassen; noch leichter aber werden aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der übrigen Linien, nehmlich durch eine bloße Subtraction gefunden, wie man aus logarithmisch-trigonometrischen Tafeln ersehen kann. Die Sinus und Cosinus brauchten übrigens nur für alle Winkel von 0^0 bis 45^0 berechnet zu werden, um dieselben zuzleich für alle übrigen Winkel zu haben, nach den oben angemerkten Sätzen, daß der Sinus eines spitzen Winkel gleich ist dem Cosinus seines Complements zu 90^0 und umgekehrt, und der Sinus und Cosinus eines Winkels zugleich noch 3 andern Winkeln im Kreise zugehört u. s. w.

§. 6.

Formeln zur Bestimmung zusammengesetzter Winkelfunktionen aus einfachen.

(Fig. 3.)

Es wird angenommen, die Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b seyen in Zahlen, nach dem Einheitsmaß des Sinus totus = 1,000... oder = 10000 Mill., bestimmt; daraus sollen die Sinus und Cosinus von andern Winkeln gefunden werden, welche aus a und b durch Addition oder Subtraction entstehen, so wie daraus die Sinus und Cosinus für Vielfache eines Winkels a, oder Theile desselben u. s. w. Hierzu dienen folgende vier Fundamentalformeln, die gewissermaßen die Basis der ganzen Goniometrie, eine reiche Quelle zur Auffindung einer fast unzähligen Menge anderer Formeln sind, und welche die Möglichkeit einer wirklichen Zahlenberechnung der goniometrischen Linien erst deutlich machen.

Es wird angenommen, die Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b seyen in Zahlen bestimmt, so ist:

I) $\sin.(a+b) = (\sin.a \,.\, \cos.b + \sin.b \,.\, \cos.a) : r$

II) $\sin.(a-b) = (\sin.a \,.\, \cos.b - \sin.b \,.\, \cos.a) : r$

III) $\cos.(a+b) = (\cos.a \,.\, \cos.b - \sin.a \,.\, \sin.b) : r$

IV) $\cos.(a-b) = (\cos.a \,.\, \cos.b + \sin.a \,.\, \sin.b) : r$

Setzt man $r = 1$, so fällt der Divisor r in diesen Formeln weg, und es wird z. B.

$\sin.(a+b) = (\sin.a \,.\, \cos.b + \sin.b \,.\, \cos.a)$ &c.

Beweis: (Fig. 3.) Mit irgend einem Halbmesser CA, als Sinus totus betrachtet, sey ein Kreisbogen AD beschrieben, welcher der Summe zweier Bogen AB, BD gleich ist, und vom größern Bogen AB der kleinere BD = BE abgeschnitten. Ist nun Bogen AB oder sein Centriwinkel = a, BD = b, so ist AD = (a + b), und AE = (a — b); demnach ist (die Construction der Hauptlinien und Hülfslinien wird sehr leicht aus der Figur erkannt) BF = sin. a, FC = cos. a, DR = sin. b, CR = cos. b, DH = sin. (a + b), HC = cos. (a + b), EG = sin. (a — b), GC = cos. (a — b).

Nun ist $\triangle DNR \sim \triangle CKR$ wegen der Gleichheit ihrer Winkel, indem DRC = 1 R, und auch KRN = 1 R u. s. w., auch ist $\triangle CKR \sim \triangle CFB$.

Folglich ist CB : BF = CR : RK oder

r : sin. a = cos. b : HN, daher

$$HN = \frac{\sin.a \,.\, \cos.b}{r}$$

ferner CB : CF = DR : DN oder

r : cos. a = sin. b : DN, daher

$$DN = \frac{\sin.b \,.\, \cos.a}{r}$$

Also ist $HN + DN = DH$ oder sin. $(a + b) =$

$$\frac{\text{sin. a . cos. b} + \text{sin. b . cos. a}}{r} \quad \text{(I)}$$

Ferner ist $MN = DN$, weil $ER = DR$ u. s. w., also $EG = HM = HN - DN$ oder

$$\text{sin. } (a - b) = \frac{\text{sin. a . cos. b} - \text{sin. b . cos. a}}{r} \quad \text{(II)}$$

Es ist ferner

$CB : CF = CR : CK$, oder

$$r : \text{cos. a} = \text{cos. b} : CK, \text{ also } CK = \frac{\text{cos. a . cos. b}}{r}$$

und $CB : BF = DR : RN$ oder

$$r : \text{sin. a} = \text{sin. b} : RN, \text{ also } RN = \frac{\text{sin. a . sin. b}}{r}$$

Da nun die Linien EG, RK, DH parallel sind, und $ER = DR$, so ist auch $KG = KH = RN$; daher $CH = CK - RN$ und $CG = CK + RN$, oder

$$\text{cos. } (a + b) = \frac{\text{cos. a . cos. b .} - \text{sin. a . sin. b}}{r} \quad \text{(III)}$$

und

$$\text{cos. } (a - b) = \frac{\text{cos. a . cos. b} + \text{sin. a . sin. b}}{r} \quad \text{(IV)}$$

Aus diesen vier zusammengesetzten Grundformeln lassen sich eine große Anzahl anderer ableiten, von welchen wir hier nur die wichtigsten anführen wollen, nehmlich diejenigen, welche entweder die Möglichkeit, die Hülfsmittel und den Gang der goniometrischen Berechnung erläutern, oder welche zu wirklichen trigonometrischen Formeln und Rechnungen, wovon wir später mehrere Beispiele sehen werden, nothwendig sind.

Man hat außer dem gegebenen Beweise der vier Formeln noch andere, die aber nicht allein nicht kürzer

und einfacher, sondern auch mit weniger wirklicher geometrischer Anschauung der verglichenen Größen verbunden sind. Einen solchen andern Beweis kann man in Klügels Math. Wörterb. II. 517 finden; — Klügel nennt ihn den leichtesten, welches ich bezweifle — noch einen andern in Kästner's Anfangsgr. d. Arithmetik u. Geom. I. Th. 512 ꝛc.

§. 7.

Abgeleitete goniometrische (trigonometrische) Formeln.

Mit den Buchstaben a und b in den vorerwähnten vier Grundformeln kann man alle Winkel vorstellen, folglich auch mit den Verbindungen (a + b) und (a — b) alle nur mögliche Winkel.

Setzt man $b = a$, so erhält man für $r = 1$.

1) Sin. (a + a) oder $\sin. 2a = 2 \sin. a . \cos. a$, daraus auch $\sin. a . \cos. a = \frac{1}{2} \sin. 2a$ (nach Formel I.)

2) $\cos. 2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a$, daher auch
$= [\cos.^2 a - (1 - \cos.^2 a)] = 2 \cos.^2 a - 1$;
daraus ergiebt sich ferner:
$2 \cos.^2 a = 1 + \cos. 2a$
$\cos. a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a}$; setzt man hier für a den Winkel $\frac{1}{2}a$, so ist:

3) $\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. a}$; daraus folgt:
$2 \cos.^2 \frac{1}{2}a - 1 = \cos. a$;
und, da $\cos.^2 \frac{1}{2}a = 1 - \sin.^2 \frac{1}{2}a$ (nach den Hauptformeln)
so ist $\cos. a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}a$, also
$\sin.^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. a$, folglich:

4) Sin. $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.a}$

Nach 3) und 4) lassen sich also die Sinus und Cosinus eines halben Winkels aus dem Cosinus des ganzen Winkels finden.

Setzt man in den Grundformeln I) III), $b = 2a$, so erhält man vermittelst gehöriger Substitution aus 1) und 2)

5) Sin. $3a = 3\sin.a \cdot \cos.^2 a - \sin.^3 a$, und
Cos. $3a = \cos.^3 a - 3\cos.a \cdot \sin.^2 a$; u. s. w.

Die allgemeinen Formeln für die Sinus und Cosinus irgend eines Vielfachen von einem Winkel, nehmlich für sin. na und cos. na können hier nicht vorgetragen werden.

Durch Combination der vier Grundformeln erhält man leicht:

6) Sin. $(a+b) + \sin.(a-b) = 2\sin.a \cdot \cos.b.$
7) Sin. $(a+b) - \sin.(a-b) = 2\sin.b \cdot \cos.a,$
8) Cos. $(a+b) + \cos.(a-b) = 2\cos.a \cdot \cos.b.$
9) Cos. $(a-b) - \cos.(a+b) = 2\sin.a \cdot \sin.b.$

Setzt man, welches immer möglich ist, irgend einen Winkel $\alpha = a + b$ einen andern Winkel $\beta = a - b$, so ist $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; also wird nach 6) und 7)

10) Sin. $\alpha + \sin.\beta = 2 \cdot \sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$
11) Sin. $\alpha - \sin.\beta = 2 \cdot \sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cdot \cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$
eben so nach 8) und 9).
12) Cos. $\alpha + \cos.\beta = 2 \cdot \cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$
13) Cos. $\beta - \cos.\alpha = 2 \cdot \sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$

Aus 10) und 11) folgt:

14) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha + \text{sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha - \text{sin.}\,\beta} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)}$

weil überhaupt $\frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \text{tang. a}$, und cot. a $= \frac{1}{\text{tang. a}}$ ist.

Aus 12) und 13) folgt:

15) $\frac{\text{Cos.}\,\beta - \text{cos.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\beta + \text{cos.}\,\alpha} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta).$

Aus 10) und 12) folgt:

16) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha + \text{sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\beta} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta).$

Aus 11 und 13) folgt:

17) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha - \text{sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\beta - \text{cos.}\,\alpha} = \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)$

Aus 6) und 8).

18) $\frac{\text{Sin.}\,(a+b) + \text{sin.}\,(a-b)}{\text{Cos.}\,(a-b) + \text{cos.}\,(a+b)} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \text{tang. a.}$

Aus 6) und 9).

19) $\frac{\text{Sin.}\,(a+b) + \text{sin.}\,(a-b)}{\text{Cos.}\,(a-b) - \text{cos.}\,(a+b)} = \frac{\text{cos. b}}{\text{sin. b}} = \text{cot. b.}$

20) $\text{Tang. a} \pm \text{tang. b} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} \pm \frac{\text{sin. b}}{\text{cos. b}}$

$$= \frac{\text{sin. a . cos. b} \pm \text{sin. b . cos. a}}{\text{cos. a . cos. b}}$$

$$= \frac{\text{sin.}\,(a \pm b)}{\text{cos. a . cos. b}}$$

21) $\text{Cot. b} \pm \text{cot. a} = \frac{\text{cos. b}}{\text{sin. b}} \pm \frac{\text{cos. a}}{\text{sin. a}} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{sin. a . sin. b}}$

Daraus folgt:

22) $\frac{\text{Tang. a} + \text{tang. b}}{\text{Tang. a} - \text{tang. b}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$.

23) $\frac{\text{Cot. b} + \text{cot. a}}{\text{Cot. b} - \text{cot. a}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$ u. s. w.

Ferner ist:

24) $\text{Tang. (a} \pm \text{b)} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{cos. (a} \pm \text{b)}}$

$$= \frac{\text{sin. a . cos. b} \pm \text{sin. b . cos. a}}{\text{cos. a . cos. b} \mp \text{sin. a . sin. b}}$$

$$= \frac{\frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} \pm \frac{\text{sin. b}}{\text{cos. b}}}{1 \mp \frac{\text{sin. a . sin. b}}{\text{cos. a . cos. b}}} = \frac{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}$$

25) $\text{Cot. (a} \pm \text{b)} = \frac{1}{\text{tang. (a} \pm \text{b)}}$

$$= \frac{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}.$$

Die Tangente von 45^0 ist = sin. tot. = 1, welches leicht aus der geometrischen Construction in einem Kreise erkannt wird.

Setzt man also in 24) den Winkel $a = 45^0$, so folgt:

26) $\text{Tang. } (45^0 + \text{b}) = \frac{1 + \text{tang. b}}{1 - \text{tang. b}}$

$\text{Tang. } (45^0 - \text{b}) = \frac{1 - \text{tang. b}}{1 + \text{tang. b}}$.

Eben so ist $\cot.(45^0 + b) = \frac{1 - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } b}$ u. s. w.

Diese Formel wird weiterhin bei einem etwas versteckten Beweis nützlich seyn.

27) $\text{Sin. } a = \sin.(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a) = 2 \sin. \frac{1}{2}a . \cos. \frac{1}{2}a$

28) $\text{Cos. } a = \cos.(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a) = \cos.^2 \frac{1}{2}a - \sin.^2 \frac{1}{2}a$;

daher

29) $1 + \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2}a$, weil $1 - \sin.^2 \frac{1}{2}a = \cos.^2 \frac{1}{2}a$ ist.

30) $1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2}a$, weil $1 - \cos.^2 \frac{1}{2}a = \sin.^2 \frac{1}{2}a$ ist.

Aus diesen Formeln lassen sich noch eine große Menge anderer ableiten, z. B. aus 6) folgt: $\text{Sin. } a . \cos. b = \frac{1}{2}[\sin.(a + b) + \sin.(a - b)]$ u. s. w. Es mag und kann an den angeführten genug seyn, und selbst von diesen stehen mehrere nur darum hier, um weniger geübten aber denkenden Lesern die Methode der Entwickelung bemerkbar zu machen. Wie man sieht, ist diese Entwickelung durchaus sehr leicht, und selbst ein Anfänger wird nun in vorkommenden Fällen die Ableitung noch anderer etwa nothwendiger Formeln ohne besondere Anstrengung selbst bewerkstelligen können.

Unter diesen Ableitungen giebt es auch mehrere Curiosa, die zwar keinen practischen Werth haben, aber doch Liebhaber der Mathematik zu einer Uebung im Denken und Analysiren dienen können. Als ein Beispiel dieser Art stehe hier folgender Satz: Wenn die Summe dreier Winkel $a + b + c = 180^0$, oder wenn demnach a, b, c, die Winkel eines Dreiecks sind, so ist die Summe der Tangenten dieser Winkel gleich dem Product dieser Tangenten, nehmlich:

$\text{tang. } a + \text{tang. } b + \text{tang. } c = \text{tang. } a . \text{tang. } b . \text{tang. } c.$

Der Beweis dafür läßt sich auf zweierlei Art geben; ich will ihn so führen, wie er aus obigen Formeln am einfachsten hervorgeht:

Es ist $\text{tang.a} + \text{tang.b} + \text{tang.c}$

$$= \frac{\sin.a}{\cos.a} + \frac{\sin.b}{\cos.b} + \frac{\sin.c}{\cos.c}$$

$$= \frac{\sin.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c + \sin.b \cdot \cos.a \cdot \cos.c + \sin.c \cdot \cos.a \cdot \cos.b}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c}$$

$$= \frac{\cos.c \cdot \sin.(a+b) + \sin.c \cdot \cos.a \cdot \cos.b}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c}$$

$$= \frac{\cos.c \cdot \sin.c + \sin.c \cdot \cos.a \cdot \cos.b}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c}, \text{ weil}$$

$(a + b)$ die Ergänzung von c zu 180^0, und also $\sin(a+b) = \sin.c$ ist;

$$= \frac{\sin.c \cdot (-\cos.(a+b) + \cos.a \cdot \cos.b)}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c}, \text{ weil}$$

$$\cos.c = -\cos.(a+b),$$

$$= \frac{\sin.c.(-\cos.a.\cos.b + \sin.a.\sin.b + \cos.a.\cos.b)}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c}$$

$$= \frac{\sin.a \cdot \sin.b \cdot \sin.c}{\cos.a \cdot \cos.b \cdot \cos.c} = \text{tang.a} \cdot \text{tang.b} \cdot \text{tang.c},$$

Nehmlich $\text{tang.a} \cdot \text{tang.b} \cdot \text{tang.c}$

$$= \text{tang.a} + \text{tang.b} + \text{tang.c}.$$

Dieser Satz gilt auch für $a + b + c = 90^0$, welches zu beweisen, auch weniger geübten Lesern gelingen wird.

Es wird nützlich seyn, die in den §§. 5, 6, 7 gefundenen Formeln, nehmlich die vorzüglichsten und brauchbarsten zur leichten Uebersicht und schnellen Auffindung in Fällen, die uns später vorkommen werden, in einem tabellarisch geordneten Schema hier beizufügen.

§. 8.

Tabelle goniometrisch = trigonometrischer Formeln oder Gleichungen, für r oder Sin. tot. = 1.

Einfache:

1) $\text{Sin.}^2 a + \cos.^2 a = 1.$

2) $\text{Sin. } a = \sqrt{1 - \cos.^2 a}$

3) $\text{Cos. } a = \sqrt{1 - \sin.^2 a}$

4) $\text{Tang. } a = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}$

5) $\text{Cotang. } a = \frac{\text{cos. a}}{\text{sin. a}}$

6) $\text{Sec. a} = \frac{1}{\text{cos. a}}$

7) $\text{Cosec. a} = \frac{1}{\text{sin. a}}$

8) Sin. vers. a = 1 — cos. a

9) Cos. vers. a = 1 — sin. a

10) Tang. a . cot. a = 1

11) $\text{Tang. a} = \frac{1}{\text{cot. a}}$

12) $\text{Cot. a} = \frac{1}{\text{tang. a}}$

Zusammengesetzte Grundformeln:

13) Sin. (a + b) = sin. a . cos. b + sin. b . cos. a

14) Sin. (a — b) = sin. a . cos. b — sin. a . cos. b.

15) $\text{Cos.}\,(a + b) = \cos.\,a \,.\, \cos.\,b - \sin.\,a \,.\, \sin.\,b$

16) $\text{Cos.}\,(a - b) = \cos.\,a \,.\, \cos.\,b + \sin.\,a \,.\, \sin.\,b$

Abgeleitete:

17) $\text{Sin.}\,2a = 2\sin.\,a \,.\, \cos.\,a$

18) $\text{Cos.}\,2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a$

19) $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.\,a}$

20) $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.\,a}$

21) $\text{Sin.}\,a = 2\sin.\,\frac{1}{2}a \,.\, \cos.\,\frac{1}{2}a$

22) $\text{Cos.}\,a = \cos.^2 \frac{1}{2}a - \sin.^2 \frac{1}{2}a$

23) $1 + \cos.\,a = 2\cos.^2 \frac{1}{2}a$

24) $1 - \cos.\,a = 2\sin.^2 \frac{1}{2}a$

25) $\text{Sin.}\,(a+b) + \sin.\,(a-b) = 2\sin.\,a \,.\, \cos.\,b$

26) $\text{Sin.}\,(a+b) - \sin.\,(a-b) = 2\sin.\,b \,.\, \cos.\,a$

27) $\text{Cos.}\,(a+b) + \cos.\,(a-b) = 2\cos.\,a \,.\, \cos.\,b$

28) $\text{Cos.}\,(a-b) - \cos.\,(a+b) = 2\sin.\,a \,.\, \sin.\,b$

29) $\text{Sin.}\,a + \sin.\,b = 2\sin.\,\frac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos.\,\frac{1}{2}(a-b)$

30) $\text{Sin.}\,a - \sin.\,b = 2\sin.\,\frac{1}{2}(a-b) \,.\, \cos.\,\frac{1}{2}(a+b)$

31) $\text{Cos.}\,a + \cos.\,b = 2\cos.\,\frac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos.\,\frac{1}{2}(a-b)$

32) $\text{Cos.}\,b - \cos.\,a = 2\sin.\,\frac{1}{2}(b+b) \,.\, \sin.\,\frac{1}{2}(a-b)$

33) $\dfrac{\text{Sin.}\,a + \sin.\,b}{\text{Sin.}\,a - \sin.\,b} = \dfrac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(a-b)}$

34) $\dfrac{\text{Cos.}\,b - \cos.\,a}{\text{Cos.}\,b + \cos\,a} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(a+b) \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

35) $\dfrac{\text{Sin.}\,a + \sin.\,b}{\text{Cos.}\,a + \cos.\,b} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(a+b)$

36) $\dfrac{\text{Sin.}\,a - \sin.\,b}{\text{Cos.}\,b - \cos.\,a} = \text{cotang.}\,\frac{1}{2}(a+b)$

37) $\text{Tang. a} \pm \text{tang. b} = \frac{\sin.(a \pm b)}{\cos. a \,.\, \cos. b}$

38) $\text{Cot. b} \pm \text{cot. a} = \frac{\sin.(a \pm b)}{\sin. a \,.\, \sin. b}$

39) $\frac{\text{Tang. a} + \text{tang. b}}{\text{Tang. a} - \text{tang. b}} = \frac{\sin.(a + b)}{\sin.(a - b)}$

40) $\frac{\text{Cot. b} + \text{cot. a}}{\text{Cot. b} - \text{cot. a}} = \frac{\sin.(a + b)}{\sin.(a - b)}$

41) $\text{Tang.}(a \pm b) = \frac{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}$

42) $\text{Cotang.}(a \pm b) = \frac{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}$

43) $\text{Tang.}(45^\circ + b) = \frac{1 + \text{tang. b}}{1 - \text{tang. b}}$

44) $\text{Tang.}(45^\circ - b) = \frac{1 - \text{tang. b}}{1 + \text{tang. b}}$

§. 9.

Von der Berechnung der goniometrisch-trigonometrischen Linien.

Vermittelst der angeführten Formeln, aus welchen sich wieder mehrere andere für besondere Annahmen *)

---

*) Wenn man z. B. in der Formel 29) den Winkel $b = 90^\circ - a$ annimmt, so wird $\frac{1}{2}(a + b) = 45^\circ$, dessen Sinus $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, wie sich durch eine geometrische Construction im Kreise für den Halbmesser $= 1$, sehr

herleiten lassen, und einiger Lehrsätze, welche den Kreis und reguläre Vielecke im Kreise betreffen, wird die Berechnung der goniometrischen Linien als Zahlengrößen, welche das Verhältniß der Längen dieser Linien zum Sinus totus allgemein ausdrücken, möglich und begreiflich. Nimmt man bei dieser Berechnung den Sinus totus, welches jeder Kreishalbmesser seyn kann, als Einheit = 1 an, so erhält man die natürlichen Sinus, Cosinus u. s. w. der Winkel. Es ist sehr leicht einzusehen, daß man diese natürlichen Zahlen der goniometrischen Linien, welche in Decimalbrüchen vorgestellt werden, und die theils kleiner, theils größer als der Sin. tot. = 1 sind, für ein anderes System, worin der Sinus totus einer andern Zahl, z. B. 100 oder 1000 ꝛc., allgemein irgend einer Zahl r gleichgesetzt wird, ebenfalls mit dieser Zahl r multipliciren müsse, um das bestimmte Verhältniß dieser Linien gegen den Sinus totus unverändert zu erhalten. Zum logarithmischen Gebrauch wird Sin. tot. gewöhnlich = 10000 Millionen angenommen. Da die goniometrischen Linien schon berechnet sind, so kann unsern jüngern Lesern nur daran gelegen seyn, eine kurze Uebersicht dieser in jedem Fall sehr mühsamen weitläufigen Berechnung zu haben. Es wird hinreichen, die Hauptmomente und den einfachsten Gang derselben hier bemerklich zu machen.

---

leicht zeigen läßt; daraus folgt sin. a + cos. a = cos. (45° — a) . $\sqrt{2}$; eben so wird dann nach Formel 30) sin. a — cos. a = sin. (a — 45) $\sqrt{2}$, oder cos. a — sin. a = sin. (45° — a) . $\sqrt{2}$, welche Formeln dazu nützen können, aus den Sinus und Cosinus von 0° bis 22 1/2° die Sinus und Cosinus weiter bis 45° zu berechnen.

1) r oder Sin. tot. = 1,00... oder = 10000 Millionen.

2) Sin. $45^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von $90^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, weil nach der geometrischen Construction das Quadrat dieser Sehne $= 2r^2$ ist.

3) Cos. 45^0 = sin. $45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nach der geometr. Constr.

4) Sin. $30^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von $60^0 = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} = 5000$ Mill., wenn Sin. tot. = 10000 Mill.

5) Cos. $30^0 = \sqrt{1 - \sin.^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ für $r = 1$.

6) Sin. $18^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von 36^0 = der halben Seite eines regulären Zehnecks im Kreise $= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

Denn man denke sich mit irgend einem Halbmesser $CB = r$ einen Kreis beschrieben (C der Mittelpunkt), diesen Halbmesser in D im mittlern und äußern Verhältniß getheilt, und die Sehne AB = dem größern Abschnitt CD gemacht, so ist AB die Seite eines regulären Zehneckes in diesem Kreise, nach einem Satz der Elementargeometrie. Nun sey $AB = CD = x$ die gesuchte Größe, so ist der kleinere Abschnitt $BD = r - x$.

Nach der Construction ist:

$$BD : CD = CD \text{ oder } AB : CB \text{ oder}$$
$$(r - x) : x = x : r, \text{ also}$$
$$x^2 = r^2 - rx, \text{ und } x^2 + rx = r^2.$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man:

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1); \text{ also}$$

ist die Seite des Zehnecks

$$AB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ für } r = 1,$$

folglich Sin. $18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

7) $\text{Cos. } 18^0 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$; denn es ist:

$$\text{Cos. } 18^0 = \sqrt{1 - \text{sin.}^2 18^0} = \sqrt{1 - \frac{(6 - 2\sqrt{5})}{16}}$$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$ durch Substitution des Werthes $\text{sin.}^2 18^0$ in 6) und gehörige Reduction.

8) $\text{Sin. } 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; denn nach §. 8. Formel 19) ist $\text{sin.} \frac{1}{2} . 30^0$ oder $\text{sin. } 15^0 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \text{ cos. } 30^0}$;

Da nun $\text{Cos. } 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so ist:

$$\text{Sin. } 15^0 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} =$$

$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ *)

9) $\text{Cos. } 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; denn es ist:

$$\text{Cos. } 15^0 = \sqrt{1 - \text{sin.}^2 15^0} = \sqrt{1 - \frac{(8 - 2\sqrt{12})}{16}}$$

$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ durch eine ähnliche Reduction, wie in 8.)

10) Aus Sinus und Cosinus von 18^0 lassen sich nach den Formeln 17) 18) 19) 20) in §. 8. die Sinus und Cosinus von 36^0, von 9^0, von $4\frac{1}{2}^0$ u. s. w. berechnen; aus Sinus und Cosinus von 15^0 die Sin. und Cos. von $7\frac{1}{2}^0$ u. s. w.

11) Nach den Formeln 14) und 16) findet man:

---

*) Diese Reduction geschieht also: $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$. Nun ist $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{12}}$, also nach der gewöhnlichen Methode, die Quadratwurzel auszuziehen, $\sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; also $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Sin. $(18^0 - 15^0) = \sin. 3^0 =$

$\frac{1}{16}[\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + 2\sqrt{(5+\sqrt{5})}]$

$= 523359562{,}43$ für r $=$ 10000 Millionen

$= 0{,}0523359562\ldots$ für r $=$ 1,00 .....

Cos. $(18^0 - 15^0)$ Cos. $3^0 =$

$\frac{1}{16}[\sqrt{30} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{10} + 2\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + 2\sqrt{(5+\sqrt{5})}]$

$= 9986295347{,}55$ für r $=$ 10000 Mill.

$= 0{,}9986295\ldots..$ für r $=$ 1,00 ....

Diese Werthe sind zwar ihrer Entstehung nach irrational, also nicht genau, aber für die Praxis bis auf ein Billiontheilchen des Sinus totus annähernd richtig.

12) Aus Sin. und Cos. von 18^0, von 9^0, von 3^0 lassen sich weiter die Sin. und Cos. von 27^0, von 12^0, von 21^0 u. s. w. finden.

13) Aus Sin. und Cos. 3^0 lassen sich ferner die Sin. und Cos. der halben Winkel, nehmlich von $1\frac{1}{2}^0$, und daraus Sin. und Cos. $\frac{3}{4}^0$ herleiten;

14) Sodann aus Sin. und Cos. von $1\frac{1}{2}^0$ und $\frac{3}{4}$, nach den Formeln Sin. und Cos. $(a + b)$ die Sin. und Cos. $2\frac{1}{4}^0$, von $3\frac{3}{4}^0$, $4\frac{1}{2}^0$, $5\frac{1}{4}^0$ u. s. w. So kann die Berechnung fortgehn von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}^0$ bis 45^0.

15) Es ist aber nicht nöthig, auf solchem Wege die Rechnung bis 45^0 fortzuführen, indem sich aus den berechneten Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 30^0 die übrigen ganz leicht durch eine bloße Subtraction ergeben. Es ist nehmlich nach den obigen Formeln §. 8.

Sin. $(a + b) = \sin. a . \cos. b + \sin. b . \cos. a$

Sin. $(a - b) = \sin. a . \cos. b - \sin. b . \cos. a$

---

also Sin. $(a + b) + \sin. (a - b) = 2 \sin. a . \cos. b$

Ferner $\text{Cos.}(a - b) = \cos.a \cdot \cos.b + \sin.a \cdot \sin.b$
$\text{Cos.}(a + b) = \cos.a \cdot \cos.b - \sin.a \cdot \sin.b$

---

also $\text{Cos.}(a - b) - \cos.(a + b) = 2 \sin.a \cdot \sin b$

Nun sey Winkel $a = 30^0$, so ist $\sin.a = \frac{1}{2}$; also wird
$\text{Sin.}(30 + b) + \sin.(30 - b) = \cos.b$
$\text{Cos.}(30 - b) - \cos.(30 + b) = \sin.b$;
daraus folgt:
$\text{Sin.}(30 + b) = \cos.b - \sin.(30 - b)$
$\text{Cos.}(30 + b) = \cos.(30 - b) - \sin.b.$

Sollte also z. B. der Sin. 38^0 gefunden werden, so wäre $b = 8^0$, also $\sin.(30 + 8) = \sin.38^0 = \cos.8^0 - \sin.22^0$, d. h. um $\sin.38^0$ zu erhalten, dürfte man nur von dem bereits berechneten $\cos.8^0$ den berechneten $\sin.22^0$ abziehen; eben so ist
$\text{Cos.}38^0 = \cos.22^0 - \sin.8^0$

16) Selbst diese Berechnung der Sin. und Cos. bis 30^0 wird noch um ein sehr Beträchtliches abgekürzt und erleichtert, wenn einmahl die Sin. und Cos. von 0^0 bis $22\frac{1}{2}^0$ gefunden sind. Denn es ist nach der Note im Anfange dieses §.

$\text{Sin.}\,a + \cos.a$ der absoluten Größe nach $= \cos.(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$, und
$\text{Cos.}\,a - \sin.a$ der absoluten Größe nach $= \sin.(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$; daraus folgt:

$$\text{Sin.}\,a = \left\{\frac{\cos.(45^0 - a) - \sin.(45^0 - a)}{2}\right\} \cdot \sqrt{2}, \text{ u.}$$

$$\text{Cos.}\,a = \left\{\frac{\cos.(45^0 - a) + \sin.(45^0 - a)}{2}\right\} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{z. B. Sin.}\,25^0 = \frac{(\cos.20^0 - \sin.20) \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{(\cos.20^0 - \sin.20^0)}{\sqrt{2}} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{Cos.}\,25^0 = \frac{(\cos.20 + \sin.20)}{\sqrt{2}}.$$

Man wird wohl thun, sich diese Operation an einem solchen Beispiel mit Zuziehung einer Sinus-Tafel, welche die Sinus und Cosinus für den Sin. tot. = 1 enthält, anschaulich zu machen.

17) Zur Berechnung der Sinus und Cosinus der Winkel von Minute zu Minute in der vorbemerkten Art ist Sin. 1′ nöthig. Dieser läßt sich so finden, daß man aus Sin. $\frac{3}{4}^0$ = Sin. 45′, daraus Sin. $\frac{45'}{2}$, und ferner die Sinus von $\frac{45'}{4}$, $\frac{45'}{8}$, $\frac{45'}{16}$, $\frac{45'}{32}$, $\frac{45'}{64}$ ableitet. Auf diesem Wege erhält man:

Sin. $\frac{45'}{32}$ = 4090615, 32 . . .

Sin. $\frac{45'}{64}$ = 2045307, 7 . . .

Bei so kleinen Winkeln, die nahe einer Minute sind, läßt sich daher ohne einen erheblichen Fehler — welcher nehmlich kein 10000-Millionentheilchen des Sinus totus mehr beträgt, — annehmen, daß die Sinus sich so gegen einander verhalten, wie die ihnen zugehörigen Winkel; daher

$\frac{45'}{64}$: 1′ = 2045307,7 : sin. 1′, also

Sin. 1′ = 2908882,06, bis auf diese Stelle annähernd richtig.

Aus Sin. 1′ läßt sich sodann Cos. 1′ finden.

18) Was die Sinus und Cosinus eines Winkels anlangt, der bloß um Sekunden von zwei andern bis auf Minuten gegebenen Winkeln differirt, so nimmt man mit Recht an, daß die Differenzen der Winkelfunktionen in diesem Falle sich sehr nahe wie die Sekundendifferenzen der Winkel selbst verhalten. Für Sekunden ist also keine besondere Berechnung nöthig gewesen.

19) Aus den Sinus und Cosinus der Winkel lassen sich die übrigen goniometrischen Größen, Tangen-

ten, Cotangenten ꝛc. nach den obigen Formeln berechnen, aber auf eine beschwerliche Art; z. B.

$$\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}.$$

Um vieles leichter ist es aber, aus den gegebenen Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der übrigen Linien zu finden.

Auf einem Wege, den wir hier nur kurz angedeutet haben, oder wenigstens auf eine ähnliche Weise mit einigen Abänderungen, sind in frühern Zeiten von unermüdlichen Rechnern die goniometrischen Größen wirklich berechnet, und in besondern Tafeln zusammengetragen worden. Die erste Arbeit dieser Art, nehmlich eine Tafel der Sehnen der Winkel, von halben zu halben Graden, nach Sexagesimaltheilchen des Sin. tot., findet sich schon in Ptolemäus Astronomie 1. B., wobei auch, des Interpolirens wegen, für jede Sehne die Differenz (Wachsthum) auf eine Minute, gegeben wird; Ptolemäus bediente sich aber einer andern als der oben angedeuteten Methode.

Was in spätern bis auf unsere Zeiten von andern Mathematikern zur vollkommeneren Ausbildung und Berichtigung der trigonometrischen Tafeln geschehen ist, namentlich von Purbach, Regiomontanus, Rhaeticus (dieser nahm den Sin. tot. = 10000 Mill. an), Valentin Otho, Neper (dieser erfand die Logarithmen, wodurch die höchst schwierige Multiplication und Division mit den sehr großen trigonometrischen Zahlen in eine ganz leichte Addition und Subtraction verwandelt wird), Briggs, Adrian Vlacq (er schrieb zwei große schätzbare Werke: Arithmetica logarithmica und Trigonometria artificialis s. magnus Canon triangulorum logarithmicus), u. a. m., dies ausführlicher anzuzeigen, gehört in eine Geschichte

der Mathematik, aber nicht hieher. Wir müssen uns begnügen, bloß zu erinnern, daß in den neueren Zeiten die Wege zur Berechnung der goniometrischen Größen durch die Bemühungen scharfsinniger Mathematiker um vieles erleichtert und abgekürzt worden sind. Insbesondere hat sich der verdienstvolle Euler, der in allen seinen Werken das Schwerste wie das Leichteste mit gleicher Einfachheit, Klarheit und Gründlichkeit vorzutragen verstand, sich durch Erfindung besonderer analytischer Formeln oder Reihen zu goniometrischem Gebrauch verdient gemacht. Solche Reihen sollen einen kurzen, sichern und bequemen Weg anzeigen, entweder aus den numerischen Sinus, Cosinus, Tangenten ꝛc. eines einfachen Winkels, die Sinus, Cosinus ꝛc. eines Vielfachen dieses Winkels — aus Sin. a, Cos. a die Sin. n a, Cos. n a — zu berechnen, oder die Sinus, Cosinus ꝛc. irgend eines Winkels unmittelbar, ohne Zuziehung anderer Sinus, Cosinus ꝛc., durch das Maß des zugehörigen Bogens in Theilen des Sinus totus, die sich aus der Verhältnißzahl π beim Kreise und der Gradzahl des Bogens sehr leicht ergeben, nach einem gewissen unveränderlichen Gesetz der Reihen auszudrükken, oder endlich dadurch, daß man diese für die goniometrischen Linien, besonders für die Sinus und Cosinus gefundenen Reihen in Factoren zerfällt, zur unmittelbaren Berechnung der Logarithmen dienen, welche den Sinus und Cosinus als Zahlengrößen, für den Sin. tot. = 10,000 Millionen, zugehören. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus ergeben sich offenbar die Logarithmen der übrigen Linien fast von selbst, nehmlich durch eine bloße gemeine Subtraction,

z. B. da $\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}$

so ist log. tang a = log. sin. a — log. cos. a

Die höhere Analysis der neuern Zeiten hat also auch der Goniometrie sehr wichtige Dienste geleistet. Da indessen die Sinustafeln und die Logarithmen der trigonometrischen Linien schon vorher, mit einem weit größern Aufwand von Zeit und Geduld, auf viel weitläufigeren Wegen, berechnet worden sind, so können die erwähnten analytischen Reihenformeln in unserer Zeit nur noch dazu dienen, die berechneten Tafeln in zweifelhaften Fällen zu prüfen und zu berichtigen, oder auch nöthigenfalls die Zahlengrößen der trigonometrischen Linien mit mehr Stellen, also genauer, auszudrücken.

Die Reihen selbst, um deren bequeme Gestaltung sich außer Euler auch noch andere Mathematiker, z. B. Bernoulli ꝛc. verdient gemacht haben, kann der junge wißbegierige Leser, der seine Kenntniß von der Goniometrie erweitern will, sehr gut und deutlich dargestellt finden in *Euleri* Introduct. in Analys. Infin. Tom. I., ferner mit einigen Modificationen in Klügels analytischer Trigonometrie, so wie in dessen reichhaltigem Mathem. Wörterbuch unter den Artikeln: Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie, — vorzüglich kurz, deutlich und gründlich auch in Pasquich's trefflichem Werke über die Mathem. Analysis, 1r B. S. 532 ꝛc.

Die Einrichtung und den Gebrauch der Sinustafeln und der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln muß man aus solchen Tafeln selbst, welche gewöhnlich in einer vorgängigen Einleitung die nöthigen Erläuterungen enthalten, kennen lernen; wir dürfen übrigens diese Kenntniß bei unsern Lesern voraussetzen. Vorzüglich richtig und brauchbar sind die Tafeln von Vega, nehmlich die kleinern in einem Bande, die mittlern mit 7 Decimalstellen in 2 Bänden für die Praxis in den meisten Fällen hinlänglich, und dessen großes kostbares Werk: Thesaurus Logarithmorum com-

pletus in Fol., mit 10 Decimalstellen, zu sehr feinen Berechnungen geeignet, jedoch ohne besondere Tafeln für die natürlichen Sinus ꝛc. ein wahrer Schatz, auf dem Grund der ältern Vlacqschen Werke erbaut, jedoch mit Zusätzen und Berichtigungen.

Von den in andern Ländern erschienenen Tafeln sind besonders brauchbar und beliebt die Tables portatives de Logarithmes, par *Callet*, Paris; diese enthalten die Logarithmen der trig. Linien sowohl für die alte, gebräuchliche, als auch für die in Frankreich vorgeschlagene Centesimal-Eintheilung des Quadranten.

Die Centesimal-Abtheilung des Quadranten und die dafür berechneten Tafeln sind außer Frankreich nicht in Gebrauch gekommen, aus leicht zu erachtenden Gründen. Solche Tafeln wurden in Frankreich von Borda und Delambre, und früher schon in Deutschland von Hobert und Ideler mit der größten Genauigkeit berechnet und herausgegeben.

Von den ganz kleinen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, die nur auf 5 Decimalstellen ꝛc. gehen, wie man solche von La Lande in Frankreich, und in Deutschland von Prasse hat, läßt sich sagen, daß ihr Gebrauch sehr unbedeutend und beschränkt ist, und daß sie für die Praxis ungefähr einen solchen Werth haben, als die Verhältnißzahl π von Archimedes für die Kreisberechnungen; man kann sie ganz entbehren.

Trigonometrische Lehrsätze

zur

Berechnung ebener Dreiecke,

mittelst der goniometrischen Größen.

---

§. 10.

Lehrsatz. (Fig. 4.)

Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich an Größe, nach irgend einem Längenmaß, gegen einander so, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, z. B. im Dreieck ABC ist:

$$BC : AC = \sin. A : \sin. B.$$

Beweis. Sind BC und AC gleich, so ist $\angle A = \angle B$, also auch sin. A = sin. B. Sind die Seiten ungleich, so schneide man auf der größern BC ein Stück BD ab, welches der kleinern Seite AC gleich ist, und fälle von C und D auf AB die Senkrechten CM, DN. Nun kann man offenbar die Winkel A und B als Centriwinkel eines Kreises betrachten, dessen Halbmesser AC = BD ist; folglich ist für den Sinus totus AC = BD, die Senkrechte CM = sin. A und die Senkrechte DN = sin. B. Es ist aber nach der Construction $\triangle BCM \sim \triangle BDN$, folglich BC:BD = CM : DN oder

$$BC : AC = \sin. A : \sin. B.$$

Dieser Satz gilt auch für ein Dreieck ABC (Fig. 5.), welches einen stumpfen Winkel C enthält, nehmlich: AB : AC = sin. C : sin. B.

Denn man verlängere BC, mache BM = AC, und fälle man von A und M auf BC und ihre Verlängerung die Senkrechten AD, MN, so ist hier für den Sin. tot. = AC = MB, die Senkrechte AD = sin. ACD oder sin. ACB, weil ein stumpfer und sein spitzer Nebenwinkel gleichen Sinus haben, und die Senkrechte MN = sin. B. Da nun △ ABD ∼ MBN, so ist AB : MB = AD : MN oder

AB : AC = sin. C : sin. B

Der Satz gilt auch für ein rechtwinklichtes Dreieck ABC (Fig. 6.), nehmlich:

BC : AC = sin. tot. : sin. B (oder cos. C)
BC : AB = sin. tot. : sin. C (oder cos. B)
AC : AB = sin. B : sin. C (oder cos. B),

welche Proportionen sich sehr leicht ergeben, wenn man die Hypothenuse BC = sin. tot. annimmt.

Man hat für diesen Satz noch einen andern weniger einfachen Beweis, welchen hier anzuführen, wohl unnöthig ist.

§. 11.

Lehrsatz. (Fig. 6.)

In einem rechtwinklichten Dreieck ABC verhält sich an Größe eine Cathete zur andern, wie der Sinus totus zur Tangente des an der ersten Cathete anliegenden spitzen Winkels, z. B.

AB : AC = sin. tot. : tang. B.

Beweis: Man denke sich mit dem Halbmesser AB aus B einen Kreis beschrieben, so ist für AB = sin. tot., die Cathete AC = tang. B; also offenbar die Länge AB zur Länge AC in demselben Verhältniß, wie der numerische Sin. tot. zur numerischen Tangente des Winkels B.

Man kann diesen Satz statt des folgenden brauchen, um aus den Catheten eines rechtwinklichten Dreieckes die spitzen Winkel B und C zu berechnen.

§. 12.

Lehrsatz (Fig. 7.)

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten (nach irgend einem Längenmaß) zur Differenz dieser Seiten so, wie die Tangente von der halben Summe der denselben Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel, z. B.

$(AC + AB) : (AC - AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(x + y) : \text{tang.}\frac{1}{2}(x - y)$.

Beweis: Man mache der kleinern Seite AB $= AF = AD$ (Verlängerung von AC), ziehe DB, FB und von C auf die Verlängerung von DB die Gerade $CE \# FB$.

Da $AD = AB = AB$, so geht ein Halbkreis über DF durch B, also ist $\angle DBF = 1R$, also FB und mithin auch CE senkrecht auf DE.

Nimmt man nun CE als Sin. tot. an, so ist $BE = \text{tang. } t$, $DE = \text{tang. } (t + y)$. Es ist, wie man leicht erkennt,

$\angle u = \angle y + \angle t$, weil $EC \# BF$,

$\angle u = \angle q$,

$\angle n = \angle x + \angle y = \angle u + \angle q = 2\angle u$,

also $\angle u = \frac{x + y}{2} = y + t$,

daher auch $\frac{x + y}{2} - y$ oder $\frac{x - y}{2} = t$.

Nun ist $\triangle DCE \sim \triangle DFB$, folglich $DC : FC$
$= DE : BE$, oder $(AC + AB) : (AC - AB)$
$= \text{tang.} \frac{1}{2}(x + y) : \text{tang.} \frac{1}{2}(x - y)$.

§. 13.

Lehrsatz (Fig. 8.)

Wenn von einer Winkelspitze C eines Dreieckes ABC eine Senkrechte CD auf die gegenüberliegende Seite AB gefällt wird, (wir nehmen hier an, daß D zwischen A und B falle), so werden die Abschnitte AD und BD durch die gegebenen Seiten des Dreieckes a, b, c nach folgenden Gleichungen bestimmt:

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ und umgekehrt}$$

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Beweis: Es sey das gesuchte Stück $AD = x$, so ist das zweite $BD = c - x$.

Nun ist $CD^2 = b^2 - x^2$

$CD^2 = a^2 - (c - x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$,

also ist $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, also

$$AD \text{ oder } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Eben so läßt sich zeigen,

$$\text{daß } BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \text{ ist.}$$

Dieser Satz gehört eigentlich nicht zu den trigonometrischen Sätzen; er muß aber als ein Hülfssatz zu andern trigonometrischen Rechnungen hier Platz finden.

Mit Hülfe der eben vorgetragenen vier Lehrsätze

von §. 11 — §. 13. lassen sich alle Dreiecke, in Hinsicht ihrer Seiten, Winkel und Flächenräume, nach einem bestimmten Längen- und Flächen-Maß, berechnen; bei dieser Berechnung bedient man sich der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln; größtentheils wird die Rechnung mit den Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Größen geführt, dadurch aber sehr abgekürzt und erleichtert. Wir lassen nun diese Aufgaben für sich in einer Reihe, die uns die natürlichste und zweckmäßigste scheint, folgen, und belegen jede derselben mit einem oder mehreren Zahlenbeispielen, um Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in dieser nützlichen, für die practische Vermessungskunde höchst wichtigen, Rechnungsweise zu üben.

Trigonometrische Berechnung

der ebenen Dreiecke.

A) Seiten und Winkel.

§. 14.

Aufgabe. (Fig. 8.)

Von einem Dreieck ABC sind eine Seite und zwei Winkel in bestimmter Lage, z. B. die Seite AB = C und die Winkel A, C gegeben; daraus sollen die drei übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Aus A und C findet man leicht

$$B = 2R - A - C.$$

Sodann ist $b : c = \sin. B : \sin. C$,

$$\text{also} \qquad b = \frac{c \cdot \sin. B}{\sin. C}.$$

Folglich $\log. b = \log. c + \log. \sin. B. - \log. \sin. C.$

$$b = \text{num.} : (\log. c + \log. \sin. B - \log. \sin. C).$$

Man suche nehmlich den Logarithmus von b, der aus den Logarithmen von c, sin. B und sin. C zusammengesetzt ist, unter den gemeinen Zahlenlogarithmen auf, so giebt die ihm entsprechende Zahl die Länge von b nach demselben Maßstab, nach welchem die Länge von c gegeben wird. Die grossen Characteristikzahlen der Sinus heben sich, wie man sieht, durch Subtraction auf, welches immer geschieht, wenn eine Seitenlänge bestimmt wird. Ein Winkel hingegen wird, wie wir

weiter sehen werden, jederzeit durch einen einfachern oder zusammengesetztern Ausdruck (Gleichung) gegeben, der im Zähler eine Winkelfunktion als trigonometrischen Factor, mehr enthält, als im Nenner, daher der Logarithmus des gesuchten Winkels immer eine große Characteristik behält, den großen numerischen Werthen der Winkelfunktionen gemäß, für Sin. tot. = 10000 Millionen.

Beispiel: Es sind gegeben, c = 3751′, ∠ A = 43° 17′, ∠ C = 57° 21′,

also ist ∠ B = 180° — 100° 38′ = 79° 22′.

Hier ist: b : 3751′ = sin. 79° 22′ : sin. 57° 21′, also

+ log. 3751	= 3,5741471	also ist
+ log. sin. 79° 22′	= 9,9924776	lg. b = 3,6413219
+	+ 13,5666247	daher
— log. sin. 57° 21′	= 9,9253028	b = 4378,466′.

Anm.: Will man die trigonometrischen Logarithmen für den Sin. tot. = 1 nehmen, so muß man, weil dann jede trigonometrische Zahl durch 10000 Mill. zu dividiren ist, von jedem dazu gehörigen Tafellogarithmus 10 ganze Einheiten (als Characteristik) subtrahiren; der Logarithmus der gesuchten Größe b erleidet dadurch, wie sich leicht beurtheilen läßt, keine Veränderung. Demnach würde sich der vorige Ansatz also umgestalten:

+ log. 3751	= 3,5741471
+ log. sin. 79° 22′	= 0,9924776 — 1 (eigentlich 9, ...
+	4,5666247 — 1 — 10)
— log. sin. 57° 21′	= 0,9253028 — 1
also log. b	= 3,6413219

Man berechne ferner $a = \frac{3751' \cdot \sin. 43^\circ 17'}{\sin. 57^\circ 21'}$,

wobei sich die schon angesetzten Logarithmen von 3751 und sin. 57° 21′ benutzen lassen.

Es sey gegeben:

$$c = 240', \angle A = 103^\circ, \angle B = 40^\circ;$$

Gesucht $a = 388{,}572' \ldots$, wie groß ist b?

Es sey gegeben:

$$a = 738', \angle C = 24^\circ 16' 13'', \angle B = 31^\circ 5';$$

Gesucht $c = 368{,}734' \ldots$, wie groß ist b?

§. 15.

Aufgabe. (Fig. 8.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten und ein anliegender Winkel, welcher nehmlich einer dieser Seiten gegenüberliegt, gegeben, z. B. b, a und $\angle A$, gegeben; daraus sollen die drei übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Es ist offenbar, daß zuerst vermittelst der drei gegebenen Stücke der zweite anliegende Winkel berechnet werden muß, um darnach den Winkel C und die Seite c zu berechnen.

Nun ist $a : b = \sin. A : \sin. B$, also $\sin B = \frac{b \cdot \sin. A}{a}$

folglich $\log. \sin. B = \log. b + \log. \sin. A - \log. a.$

Diesen Logarithmus suche man unter den Tafellogarithmen der Sinus auf; der dazu gehörige Winkel ist zweideutig, d. h. der Sin. B und also auch sein Logarithmus gehört sowohl zu dem gefundenen spitzen Winkel als auch zu dem stumpfen Nebenwinkel desselben, und zwar ist der Sinus und Log. sin. B für beide Winkel positiv. Daher kann man nach dieser Rechnung sowohl den spitzen Winkel B oder seinen stumpfen Nebenwinkel nehmen, wodurch auch der dritte Winkel C

einen doppelten Werth erlangt; diese Zweideutigkeit der Winkel macht die Construction von zwei verschiedenen Dreiecken möglich, die die gegebenen Stücke enthalten, und doch der Größe und Gestalt nach verschieden sind.

Die Zweideutigkeit verschwindet, nehmlich der gesuchte Winkel B muß ein spitzer seyn, wenn $\angle A = 1R$ oder größer als $1R$ ist, weil die Summe der drei Winkel $= 2R$ ist, oder wenn, im Fall A ein spitzer Winkel ist, die demselben anliegende Seite b kleiner als die gegenüberliegende a ist, weil der größern Seite der größere Winkel und der kleinern Seite der kleinere Winkel gegenüberliegt, und also für $A < 1R$, noch mehr $B < 1R$ seyn muß.

Die Zweideutigkeit findet aber immer Statt, wenn $\angle A$ ein spitzer und die ihm anliegende Seite b größer als die gegenüberliegende a ist. Dies zeigt auch die geometrische Construction in unsrer Figur, nehmlich in dem letztern Falle kann CB auch in die Lage CB′ kommen, ohne daß die gegebenen Stücke a, b, A sich ändern. Ob nun in diesem zweideutigen Falle der spitze Winkel CBA oder sein stumpfer Nebenwinkel CB′A zu nehmen sey, müssen in der Praxis die Bestimmungen oder bekannten Umstände einer Aufgabe entscheiden.

Beispiele: $a = 73625'$, $b = 67241'$ $\angle A = 43^0 55'$.

Hier ist $73625 : 67241 = \sin. 43^0 55' : \sin. B.$

$$\text{Also } \sin. B = \frac{67241 \cdot \sin. 43^0 55'}{73625}$$

Der Ausdruck für Sin. B behält nach der Division durch den Nenner einen trigonometrischen Factor, oder, wie wir vorher sagten, sein Zähler enthält einen trigonometrischen Factor mehr, als sein Nenner, welches bei Winkelbestimmungen immer der Fall ist, dahingegen

bei Längenbestimmungen die einfachern oder zusammengesetztern Ausdrücke dafür im Zähler und Nenner gleichviel trigonometrische Factoren enthalten, wodurch bei der trigonometrischen Bearbeitung die großen Characteristikzahlen sich heben. In allen Fällen, wo im Zähler oder Nenner solcher Ausdrücke für Längen oder Winkel ein oder auch zwei ꝛc. trigonometrische Factoren zu fehlen scheinen, müssen dieselben durch den Factor Sinus totus oder die zweite Potenz ꝛc. desselben ergänzt werden, wie sich aus der Entstehung der trigonometrischen Gleichung immer leicht erweisen läßt. Wir werden weiterhin Gelegenheit finden, dies an mehreren Beispielen zu zeigen.

Der Winkel B wird nach obiger Gleichung logarithmisch also bestimmt:

+	log. 67241	=	4,8276342
+	log. sin. 43° 55′	=	9,8411162
		+	14,6687504
—	log. 73625	=	4,8670253
	Log. sin. B	=	9,8017251

Dazu gehört unter den Sinus-Logarithmen der Winkel 39° 18′ 23″ sehr nahe, nehmlich ungefähr um $\frac{4}{10}$ einer Sekunde zu wenig. Durch solche Berechnung entstehen bei wirklichen Dreiecksbestimmungen die Angaben der Winkel bis auf Zehntel, Hundertel, selbst Tausendtheilchen einer Sekunde. Man muß ja nicht glauben, daß auch mit den größten und vollkommensten Winkelmessern die Messung der Winkel bis zu diesem Grad zuverläßiger Genauigkeit sich erheben könne. Dagegen streiten außer der in jedem Fall begrenzten Genauigkeit der Instrumente — selbst die vollkommensten astronomischen Kreise, Bordaische Kreise, Quadranten, große Sectoren nicht ausgenommen — noch manche andere Umstände, z. B. die Unvollkommenheit unserer Augen.

Der gesuchte Winkel B ist nach der trigonometrischen Rechnung nicht allein $39^0\ 18'\ 23''$, sondern auch dessen stumpfer Nebenwinkel $140^0\ 41'\ 37''$, und demnach würde auch der Winkel C auf doppelte Weise bestimmt werden können. Indessen wird die Zweideutigkeit durch den bekannten Umstand gehoben, daß $b < a$, mithin auch $\angle B < \angle A$ seyn muß. Also ist in unserm Beispiel $\angle B = 39^0\ 18'\ 23''$ sehr nahe, daher der dritte Winkel $C = 96^0\ 46'\ 37''$ sehr nahe.

Ferner $a : c = \sin. A : \sin. C$, also $c = \dfrac{a \,.\, \sin. C}{\sin. A}$

$$\log. c = \log. a + \log. \sin. C - \log. \sin. A.$$

So findet man die dritte Seite des Dreiecks c. Wie groß ist c in dem gegebenen Beispiele?

Es werde hier nochmahls, und dann nicht wieder erinnert, daß die logarithmische Bearbeitung dieser Aufgabe, wie der im §. 14, sich ebenfalls für den Sin. tot. $= 1$ gesetzt, verrichten läßt, wodurch der obige Ansatz sich also gestaltet:

$$\begin{array}{rl} \log. 67241 = & 4{,}8276342 \\ \log. \sin. 43^0\,55' = & 0{,}8411162 - 1 \\ \hline + & 5{,}6687504 - 1 \\ - \log. 73625 = & 4{,}8670253 \\ \hline \log. \sin. B = & 0{,}8017251 - 1 \text{ für sin. tot.} = 1 \end{array}$$

Will man diesen Logarithmus in den Tafeln, wo sin. tot. $=$ 10000 Mill. und dessen Logarithmus $=$ 10 ganze Einheiten ist, aufsuchen, so muß man seiner Characteristik 10 Einheiten zusetzen, oder wegen $10 - 1 = 9$ der Characteristik die Zahl 9 geben; somit wird wie oben $\log. \sin. B = 9{,}8017251$ u. s. w. quod bene notandum.

Beispiel eines zweideutigen Falls:

Es sey gegeben b = 49, a = 36, ∠ A = 35° 7′

Gesucht ∠ B = 51° 32′ oder = 128° 28′.

Hier kann B sowohl 51° 32′ als auch 128° 28′ seyn.

Für B = 51° 32′ wird gefunden c = 62,476.

Wie groß wird aber c für B = 128° 28′.

§. 16.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck sind die beiden Catheten b, c gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Außer b, c ist auch ∠ A = 90° gegeben. Man muß zuerst einen der beiden spitzen Winkel berechnen, z. B. B.

Es ist c : b = sin. tot. : tang. B. (nach d. Lehrs. §. 11)

$$\text{also tang. } B = \frac{b \,.\, \text{sin. tot.}}{c}$$

$$\text{oder für sin. tot.} = 1, \text{ tang. } B = \frac{b}{c}$$

log. täng. B = log. b — log. c + 10.

Diesen Logarithmus suche man unter den Logarithmen der Tangenten auf, so ist der dazu gehörige Winkel dem gesuchten Winkel B gleich. Aus B ergiebt sich C = 90° — B.

Die Hypothenuse a ergiebt sich aus dieser Proportion:

a : b = sin. tot. : sin. B oder a : c = sin. tot. : cos. B.

also log. a = log. b + 10 — log. sin. B u. s. w.

Beispiel: b = 362, c = 549.

+	log. 362 =	2,5587086
+	log. sin. t. =	10,.....
	+	12,5587086
—	log. 549 =	2,7395723
	log. tang. B =	9,8191363, also

$\angle B = 33^0\ 24'\ 0{,}3''$ sehr nahe,

daher $\angle C = 56^0\ 35'\ 59{,}7''$ sehr nahe.

Wie groß ist nun die Hypothenuse a?

Die Berechnung der rechtwinklichten Dreiecke wird dadurch sehr erleichtert, daß der log. sin. tot. = 10 kein Aufsuchen in den Tafeln nöthig macht, überdies auch leicht zu addiren und zu subtrahiren ist.

§. 17.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck ABC sind die Hypothenuse a und eine Cathete c gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Es ist $a : c = \text{sin. tot.} : \text{sin. C}$

oder $a : c = \text{sin. tot.} : \text{cos. B.}$

also $\log. \text{sin. C} = \log. c + 10 - \log. a$

$\log. \text{cos. B} = \log. c + 10 - \log. a.$

Sucht man so in den Tafeln $\angle C$, so erhält man nach einer zweckmäßigen Einrichtung der Tafeln sogleich auch den Complementswinkel B in der Columne der Cosinus.

Ferner ist $a : b = \text{sin. tot.} : \text{sin. B}$ oder cos. C, oder

$c : b = \text{sin. tot.} : \text{tang. B.}$

So findet man ganz leicht die Größe b.

Beispiel: Gegeben $a = 5$, $c = 4$.
Wie groß sind B, C und b?

Auf solche Weise erhält man einen Begriff von dem Verhältniß der Seiten und Winkel in einem rechtwinklichten Dreieck, welches in der Praxis bisweilen seinen Nutzen hat.

§. 18.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck ABC sind eine Cathete c und der an ihr liegende spitze Winkel B gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Aus B ergiebt sich $\angle C = 90^0 - B$.

Ferner ist $c : b = \text{sin. tot.} : \text{tang. B}$,

also $b = \frac{c \,.\, \text{tang. B}}{\text{sin. tot.}}$ oder $= c \,.\, \text{tang. B}$ für sin. tot. $= 1$.

Rechnet man logarithmisch nach der Formel $b = c \,.\, \text{tang. B}$, so muß dem trigonometrischen Factor tang. B ein anderer als Divisor oder Nenner entgegengesetzt werden; dieser fehlende Factor ist hier offenbar der Sin. totus; also muß die logarithmische Bearbeitung des Ausdrucks $b = c \,.\, \text{tang. B}$ folgendergestalt verrichtet werden:

$\log. b = \log. c + \log. \text{tang. B} - 10$ für das gewöhnliche logarithmisch-trigonometrische System. So erhellt die in §. 15 gemachte Bemerkung, und eine ganz gleiche Bewandniß hat es mit allen trigonometrischen Gleichungen worin ein oder auch mehrere trigonometrische Factoren dem Anschein nach fehlen.

Die Hypothenuse a erhält man, wie vorher gezeigt wurde, durch diese Proportion:

$$a : c = \text{sin. tot.} : \cos. B, \text{ also } a = \frac{c \,.\, \text{sin. tot.}}{\cos. B} \text{ u.s.w.}$$

Man könnte auch setzen: a : c = sec. B : sin. tot. Man kann aber hier, so wie in den meisten Fällen, die Secante entbehren. Darum stehen auch die Logarithmen der Secanten nicht in den Tafeln, sind aber nöthigenfalls sehr leicht zu erhalten, indem man den logarithmischen Cosinus eines Winkels vom doppelten Logarithmus des Sin. tot., nehmlich von 20, subtrahirt. Denn nach den obigen goniometrischen Grundformeln ist für irgend einen Winkel a

$$\sec. a = \frac{1}{\cos. a} \text{ eigentlich } = \frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin. tot.}}{\cos. a},$$

also log. sec. a = 20 — log. cos. a.

Beispiel: Es sey gegeben c = 5637', ∠ B = 57° 13';
Gesucht b.

Hier ist 5637 : b = sin. tot. : tang. 57° 13'

Also + log. 5637 =	3,7510480
+ log. tang. 57° 13' =	10,1910842
— log sin. tot. =	10, ...

log. b = 3,9421322, folglich b = 8752,5'.

Wie groß ist a?

§. 19.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten b, c und der Winkel A, welchen sie bilden (einschließen), gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Man berechne die Winkel B, C nach dem trigonometrischen Lehrsatz in §. 12. Diesem zufolge ist, wenn c die größere, b die kleinere Seite:

$(c+b):(c-b) = \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B):\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B)$, also

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B) = \frac{(c-b)}{(c+b)} \cdot \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B).$$

Da $(C+B+A) = 180^0$ oder $2R$, so ist $\frac{1}{2}(C+B+A) = 1R = 90^0$, oder $\frac{1}{2}(C+B)$ und $\frac{1}{2}A$ ergänzen einander zu 90^0, und $\frac{1}{2}A$ ist das Complement von $\frac{1}{2}(C+B)$; also ist die Tangente von $\frac{1}{2}(C+B) =$ der Cotangente von $\frac{1}{2}A$. Demnach kann man jene Gleichung einfacher auch so ansetzen:

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B) = \frac{(c-b)}{(c+b)} \cdot \text{cot.}\frac{1}{2}A.$$

Folglich $\log.\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B) =$

$$\log.(c-b) + \log.\text{cot.}\frac{1}{2}A - \log.(c+b)$$

Das Aggregat der bekannten Größenlogarithmen im zweiten Theile der Gleichung giebt den Logarithmus von $\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B)$. Diesen Logarithmus suche man unter den Logarithmen der Tangenten auf, so ist der entsprechende Winkel $= \frac{1}{2}(C-B)$. Da A bekannt ist, so ist auch $B+C$, also auch $\frac{1}{2}(C+B)$ leicht zu bestimmen.

Nun sey $\frac{1}{2}(C+B) = S$ bekannt,

$\frac{1}{2}(C-B) = D$ berechnet, wie eben gezeigt worden;

so ist $C+B = 2S$

$C-B = 2D$, also, wie man leicht sieht,

$C = S+D$, und $B = S-D$.

Sind die Winkel C und B einmahl bestimmt, so ergiebt sich die dritte unbekannte Seite a durch die bekannte Proportion:

a : c = sin. A : sin. C, *also*
log. a = log. c + log. sin. A — l g. sin. C u. ſ. w.

Man könnte einen unbekannten Winkel B, und daraus ſodann den zweiten C auch noch auf andre Art beſtimmen, wobei jedoch nichts gewonnen wird. Man denke ſich z. B. die Senkrechte CD auf AB; ſo iſt:

b : AD = sin. tot. : cos. A, ſo fände man logarithmiſch AD, alſo auch BD = c — AD

ferner b : CD = sin. tot. : sin. A, ſo fände man CD;

dann iſt BD : CD = sin. tot. : tang. B; ſo fände man endlich ∠ B.

Eine andre Formel oder Gleichung für den Winkel B, die ſich auf eben ſolche Weiſe aus b, c, A ableiten läßt, übergehen wir, da ſie nicht einmahl eine logarithmiſche Bearbeitung geſtattet.

Zuſatz: Man kann auch aus zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel eines Dreiecks, aus b, c, A, die dritte Seite unmittelbar berechnen, nehmlich ohne vorher die Winkel B, C beſtimmt zu haben. Da dieſe Forderung in der Ausübung oft vorkommt, ſo darf die Methode einer ſolchen Berechnung hier nicht vergeſſen werden. Es ſeyen alſo die Seiten b, c und der Winkel A gegeben, die Seite a werde hieraus berechnet.

Auflöſung: CD ſey ſenkrecht auf die Seite c,

ſo iſt $AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ (nach d. Lehrſ. in §. 13.)

Auch iſt b : AD = sin. tot. : cos. A; alſo AD = b . cos. A für sin. tot. = 1.

Daraus folgt: $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = b \cdot \cos. A$, und

daraus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A$, alſo

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A}$. Hierbei muß man nicht vergeſſen, daß, wenn der Winkel A ein ſtum-

pfer ist, der Cosinus von A negativ wird; folglich wird in diesem Falle: $a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \,.\, \cos. A}$

Diese Berechnung von a läßt sich nicht ganz, aber doch großentheils logarithmisch bewirken, und ist eben nicht sehr beschwerlich. Man berechne zuerst $2bc \,.\, \cos. A$ logarithmisch, der Logarithmus dieses Products ist $=$ log. 2 $+$ log. b $+$ log. c $+$ log. cos. A $-$ 10, (da der trigonometrische Factor Cos. A für logar. Bearbeitung $\frac{\cos. A}{\sin. tot.}$ ist, so muß vom log. cos. A die ganze Zahl 10 subtrahirt werden); zu dem Aggregat dieser Logarithmen suche man die entsprechende Zahl, subtrahire diese von $(b^2 + c^2)$, wenn $A < 90$, hingegen addire man sie dazu, wenn $A > 90^0$ ist; die so gefundene Zahl: $b^2 + c^2 \mp 2bc \,.\, \cos. A$ sey $= S$;

so ist $a = \sqrt{S}$, $\log. a = \frac{\log. S}{2}$ also

$$a = \text{num}: \left\{\frac{\log. S}{2}\right\}.$$

Wollte man die Formel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos. A$ so umformen, daß sie eine vollständige Bearbeitung durch Logarithmen zuließe, so könnte dies vermittelst der Einführung eines sogenannten Hülfswinkels φ, nehmlich durch folgenden besondern Kunstgriff geschehen, der späterhin noch mehrmahls gebraucht werden wird, und den ich meine Leser wohl zu bedenken und zu behalten bitte.

Es ist nehmlich

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - 2bc + c^2 + 2bc - 2bc \,.\, \cos. A \\ &= (c - b)^2 + 2bc - 2bc \,.\, \cos. A \\ &= (c - b)^2 + 2bc\,(1 - \cos. A.) \end{aligned}$$

Da nun (nach der Formel 24 im §. 8), $1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$,

so ist $a^2 = (c - b)^2 + 2bc \cdot (2 \sin.^2 \frac{1}{2} A)$, oder

$$a^2 = (c - b)^2 \cdot \left\{1 + \frac{4bc \cdot \sin.^2 \frac{1}{2} A}{(c-b)^2}\right\}.$$

Nun setze man $\frac{4bc \cdot \sin.^2 \frac{1}{2} A}{(c-b)^2} = \text{tang.}^2 \varphi$, oder

$$\text{tang. } \varphi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} A}{(c-b)} \cdot \sqrt{bc},$$ und suche nach dieser Gleichung logarithmisch, wie gewöhnlich, den Hülfswinkel φ, welches immer möglich ist, da die Tangenten jede Größe haben können. Ist der Winkel φ gefunden, so wird die obige Gleichung für a^2 in diese verwandelt:

$$a^2 = (c-b)^2 \cdot (1 + \text{tang.}^2 \varphi), \text{ also}$$

$$a = (c-b) \cdot \sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi}, \text{ oder weil}$$

$$\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi} = \text{sec. } \varphi,$$

$$a = (c-b) \cdot \text{sec. } \varphi, \text{ oder weil sec. } \varphi = \frac{1}{\cos. \varphi},$$

$$a = \frac{(c-b)}{\cos. \varphi} \text{ eigentlich aber } = \frac{\text{sin. tot.} \times (c-b)}{\cos. \varphi},$$

also endlich $\log. a = 10 + \log.(c-b) - \log. \cos. \varphi$ ꝛc.

Beispiele: Es seyen gegeben: $c = 317'$, $b = 295'$,
$\angle A\ 32^0\ 17$;
Gesucht C, B und a.

Auflösung: Sollen die Winkel C, B berechnet werden, so ist hier $(c + b) = 612$, $(c - b) = 22$,
$\frac{1}{2}(C + B) = 73^0\ 51'\ 30''$, $\frac{1}{2} A = 16^0\ 8'\ 30''$.

Folglich ist nach obiger Formel:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{22 \cdot \text{cot. } 16^0\ 8'\ 30''}{612}.$$

Nun ist + log. 22 = 1,3424227
+ log. cot. 16° 8′ 30″ = 10,5384668

\+ 11,8808895
— log. 612 = 2,7867514

Also log. tang. $\frac{1}{2}$(C — B) = 9,0941381,
folglich $\angle \frac{1}{2}$(C — B) = 7° 4′ 49″ sehr nahe,
und da $\angle \frac{1}{2}$(C + B) = 73° 51′ 30″

so ist der größere Winkel C = 80° 56′ 19″
der kleinere B = 66° 46′ 41″
der gegebene Winkel A ist = 32° 17′

Summe der drei Winkel A + B + C = 180°, wie es seyn muß.

Sind die Winkel einmahl berechnet, so ist die Seite a leicht zu berechnen, nehmlich:

a : 317 = sin. 32° 17′ : sin. 80° 56′ 19″

Logarithmisch berechnet wird a = 171,451 ....

Zweite Methode der Berechnung der Seite a, wenn bloß die Seiten b, c und der Winkel A hierzu gebraucht werden sollen. Der Hülfswinkel φ wird hier durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\text{tang. } \varphi = \frac{2 \cdot \text{sin. } 16^\circ 8' 30'' \cdot \sqrt{295 \cdot 317}}{22}.$$

Also log. tang. φ

$$= 2 + \text{log. sin. } 16^\circ 8' 30'' + \frac{\text{log. } 295 + \text{log. } 317}{2} - \text{log. } 22.$$

Es ist + log. 2 = 0,30103000
+ log. sin. 16° 8′ 30″ = 9,4440635
+ log. $\sqrt{295 \cdot 317}$ = 2,4854403 $\left(= \frac{\text{log. } 295 + \text{log. } 317}{2}\right)$

\+ 12,2305338
— log. 22 = 1,3424227

log. tang. φ = 10,8881111

Dazu gehört unter den Logarithmen der Tangenten, der Winkel:

$$\varphi = 82^0\,37'\,39{,}5''$$ sehr nahe.

Ferner ist in unserm Beispiel:

$$a = \frac{\text{sin. tot.} \times 22}{\cos. 82^0\,37'\,39{,}5''}$$

Es ist $+ \log.\text{sin. tot.} + \log. 22 = 11{,}3424227$

$- \log. \cos. 82^0\,37'\,39{,}5'' = 9{,}1082845$

Also $\log. a = 2{,}2341382$

Also $a = 171{,}451\ldots.$ wie vorher. Man kann auch nach der Formel:

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A)}$$

die Rechnung führen, um die Resultate nach verschiedenen Methoden zu vergleichen.

Aufmerksame und geschickte Rechner werden nach einem solchen Beispiele nun selbst beurtheilen können, welche von den verschiedenen Auflösungsarten die kürzeste und bequemste ist, also in der Praxis den Vorzug verdient.

§. 20.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind die drei Seiten a, b, c nach irgend einem Längenmaß (oder auch nur im Verhältniß ihrer Längen, z.B. $a:b:c = 5:8:11$) gegeben; es sollen daraus die Winkel A, B, C berechnet werden.

Auflösung: Es ist $AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ (nach dem Lehrsatz im §. 13.)

Auch $b : AD = \text{sin. tot.} : \cos. A$, also

$$AD = \frac{b \,.\, \cos. A}{\text{sin. tot.}} \text{ oder } b \,.\, \cos. A \text{ für sin. tot.} = 1.$$

$$\text{Folglich ist } b \,.\, \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$\text{und } \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

für den sin. tot. = 1. So fände sich die Größe von cos. A und also der Winkel A nach den natürlichen (nicht logarithmischen) Sinustafeln.

Diese Gleichung für den Winkel A hat aber auch die Unbequemlichkeit, daß sie sich nicht ganz logarithmisch behandeln läßt. Sie läßt sich aber zu diesem Zweck also umformen:

Es ist $\text{sin.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (1 - \cos. A)$, nach Formel 24) in §. 8.

Setzt man in dieser Gleichung $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

so wird:

$$\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} - \left\{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc}\right\} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}$$ [oder weil allgemein $m^2 - n^2 = (m + n) \,.\, (m - n)$]

$$= \frac{(a + b - c) \,.\, (a - b + c)}{4bc}, \text{ also}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \text{sin. tot.} \times \sqrt{\left\{\frac{(a + c - b) \,.\, (a + b - c)}{4bc}\right\}}$$

Nimmt man nun den bekannten Perimeter des Dreiecks, nehmlich

$(a + b + c) = 2P$, an, so wird

$(a + c - b) = 2P - 2b$ und $(a + b - c) = 2P - 2c$;

Daher wird offenbar:

I) $\text{Sin.}\frac{1}{2}A = \text{sin. tot.}\sqrt{\left\{\frac{(P-b).(P-c)}{bc}\right\}}$, folglich

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = 10 + \frac{\log.(P-b) + \log.(P-c) - (\log.b + \log.c}{2}$$

So findet man logarithmisch den Winkel $\frac{1}{2}A$ und daraus den ganzen Winkel A. Eine Zweideutigkeit des durch seinen Sinus gegebenen Winkels $\frac{1}{2}A$ kann hier darum gar nicht Statt finden, weil offenbar A kleiner als 180^0 und demnach $\frac{1}{2}A$ kleiner als 90^0 seyn muß.

Der Winkel $\frac{1}{2}A$ läßt sich auch durch seinen Cosinus logarithmisch bestimmen. Nach der Formel 23) im §. 8. ist nehmlich:

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1 + \cos.A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc.},$$ durch Substitution des oben gefundenen Werthes für cos. A;

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$ also

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a).(b+c-a)}{4bc}$$

$$= \frac{P.(P-a)}{bc},$$ durch eine ähnliche Reduction für $a+b+c = 2P$, wie vorher;

also II) $\text{Cos.}\frac{1}{2}A = \text{sin. tot.}\sqrt{\frac{P.(P-a)}{bc}}$ u. s. w.

Zur Berechnung des Winkels $\frac{1}{2}A$ bedient man sich am besten der ersten Formel, wenn der Winkel sehr klein ist, der zweiten hingegen, wenn der Winkel $\frac{1}{2}A$ nahe an 90^0 ist, indem die Sinus der Winkel nahe an 90^0 und die Cosinus der Winkel nahe an 0^0 nur geringe Differenzen in der Fortschreitung der Winkel um kleine Theile haben.

Auf demselben Wege, wie ∠ A, läßt sich auch durch gehörige Versetzung der gegebenen Größen, der ∠ B logarithmisch berechnen, z. B.

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B = \text{sin. tot. } \sqrt{\frac{P \cdot (P - b)}{b c}} \text{ u. s. w.}$$

Aus den berechneten Winkeln A, B wird der dritte C = 180 — (A + B) durch gemeine Rechnung gefunden. Eine bessere und kürzere Methode, als die angezeigte, die Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten zu bestimmen, kann es wohl nicht geben.

Beispiel: Es seyen gegeben: b = 150′, c = 140′, a = 130, oder welches offenbar gleichgültig ist, das Zahlenverhältniß der Seiten a : b : c = 13 : 15 : 14 (13, 15, 14 können jedes Längenmaß oder jedes Gleichvielfache eines solchen Maßes vorstellen); es soll z. B. der Winkel A berechnet werden.

Auflösung: Hier ist $P = +\frac{260}{2} = 210$, P — b = 60, P — c = 70, also

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \text{sin. tot. } \sqrt{\frac{60 \cdot 70}{150 \cdot 140}}$$

$$\text{oder} = \sqrt{\frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin. tot.} \times 60 \cdot 70}{150 \cdot 140}}$$

Es ist log. 60 = 1,7781513
2 log. sin. tot. + log. 70 = 21,8450980
Summe = 23,6232493
— log. 150 = 2,1760913
— log. 140 = 2,1461280
— Summe = 4,3222193
Differenz = 19,3010300, durch 2 dividirt, giebt:

log. sin. $\frac{1}{2}$ A = 9,6505150; dazu gehört der Winkel
$\frac{1}{2}$ A = 26° 33′ 54″ sehr nahe, also
∠ A = 53° 7′ 48″

Wie groß wird der Winkel B nach der ersten oder zweiten Formel berechnet?

Hätte man bei obiger Berechnung statt der Zahlen 60, 70, 150, 140 die abgekürzten Verhältnißzahlen 6, 7, 15, 14 gebraucht, so hätte man, wie leicht zu beurtheilen ist, dasselbe Endresultat erhalten. Es ist also zur Berechnung der Winkel eines Dreiecks schon völlig hinreichend, wenn im Allgemeinen das Verhältniß ihrer Seiten in bestimmten Zahlen,

$$a : b : c = m : n : r$$

gegeben wird. Dies folgt schon aus der Elementargeometrie.

Gesetzt $a : b : c = 13 : 19 : 7$; wie groß sind die Winkel A, B, C?

B. Flächenräume der Dreiecke.

---

§. 21.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind eine Seite und zwei Winkel (also auch der dritte) in bestimmter Lage, z. B. c, A, B gegeben; daraus soll der Flächeninhalt des Dreiecks nach irgend einem quadratischen Flächenmaß berechnet werden, das sich auf das Längenmaß der Seite c bezieht, z. B. in Quadratfußen, wenn das Maß der Seite c in Fußen gegeben ist.

Auflösung: Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird bekanntlich durch das halbe Product aus seiner

Grundlinie und seiner Höhe (als Zahlenfactoren betrachtet) bestimmt. Man kann zur Grundlinie (Basis) des Dreiecks nehmen, welche Seite desselben man will. Betrachten wir nun in unserem Falle c als die Grundlinie, so wird CD die Höhe des Dreiecks, und es kommt nur darauf an, durch eine trigonometrische Gleichung (Funktion) die Höhe CD nach den gegebenen Größen c, A, B, C zu bestimmen.

Es ist $c : b = \sin. C : \sin. B$; also

$$b = \frac{c \,.\, \sin. B}{\sin. C}, \text{ ferner ist}$$

$$b : CD = \sin. tot. : \sin. A; \text{ also}$$

$$CD = \frac{b \,.\, \sin. A}{\sin. tot.}, \text{ oder durch gehörige Substitution des Werthes von b}$$

$$= \frac{c \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{\sin C \times \sin. tot.}$$

Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$= \frac{c \,.\, CD}{2} \text{ oder nach gehöriger Substitution des gefundenen Werthes für CD,}$$

$$= \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{2 \,.\, \sin. C \times \sin. tot.}$$

$$= \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{2 \,.\, \sin. C} \text{ für sin. tot.} = 1.$$

Wollte man nach dem zweiten Ausdruck die Rechnung trigonometrisch führen, so dürfte man nicht vergessen, daß im Nenner ein trigonometrischer Factor fehlt, welches hier ganz offenbar Sin. tot. ist, wie in allen andern Fällen, wo ein solcher Factor entweder im Zähler bei Winkelbestimmungen, oder bei andern Größenbestimmungen (von Längen, Flächen) im Nenner zu

fehlen scheint. Man kann aber auch, ohne den Sinus totus in Betrachtung zu ziehen, indem man nehmlich die goniometrischen Größen für den Sin. tot. = 1 berechnet nimmt, bei der logarithmischen Bearbeitung jenes Ausdrucks von dem Tafellogarithmus jedes trigonometrischen Factors 10 ganze Einheiten abziehen, wodurch, wie man leicht begreift, ein ganz gleiches Resultat erhalten wird. Es heiße in unserm Falle der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks F, so

$$\text{ist } F = \frac{c^2 \,.\, \sin.A \,.\, \sin.B}{2 \,.\, \sin.C \,.\, \sin.tot.}, \text{ also}$$

$$\log.F = 2\log.c + \log.\sin.A + \log.\sin.B - \log.2 - \log.\sin.C - 10$$

$$\text{oder } F = \frac{c^2 \,.\, \sin.A \,.\, \sin.B}{2 \sin.C} \text{ für } \sin.tot. = 1, \text{ also}$$

$$\log.F = 2\log.c + \log.\sin.A - 10 + \log.\sin.B - 10 - (\log.2 + \log.\sin.C - 10)$$
$$= 2\log.c + \log.\sin.A + \log.\sin.B - \log.2 - \log.\sin.C - 10.$$

Ich glaube nun in der Folge bei allen ähnlichen Fällen, wo nehmlich fehlende trigonometrische Factoren zu ergänzen seyn werden, eine Wiederholung der hierüber schon einige Mahle gemachten Bemerkung nicht mehr nöthig zu haben.

Beispiel: Es seyen gegeben; $c = 135$ Ruthen, $\angle A = 128^0\,25'$, $\angle B = 24^0\,30'$, also $\angle C = 27^0\,5'$.

Logarithmische Auflösung:

+ 2 . log. 135	= 4,2606676	
+ lg.sin. $128^0\,25'$ od. $51^0\,35'$	= 0,8940461 — 1	(eigentlich 9, — 10,)
+ log. sin. $24^0\,30'$	= 0,6177270 — 1	
+	5,7724407 — 2	
— log. 2	= 0,3010300	
— log. sin. $27^0\,5'$	= 0,6582842 — 1	
—	0,9593142 — 1	

Also log.F = 4,8131265 — 1 = 3,8131265

Folglich ist der Flächenraum des Dreiecks F = 6503,19 Quadratruthen = 6503 □Ruthen 19 □Fuß nach der Decimaltheilung.

Den logarithmischen Ansatz habe ich absichtlich für sin. tot. = 1 gemacht, damit weniger geübte Rechner sehen, wie sie sich hierbei zu verhalten haben, und diese Methode des Ansatzes, als die kürzeste, leicht handhaben lernen. Dieselbe soll in der Folge öfter angewendet werden.

Zusatz: Es kann sich ereignen, daß zwei Winkel des Dreiecks gleich sind; dann wird die Berechnung des Flächeninhalts etwas kürzer.

1) Es sey $\angle C = \angle B$; so ist

$$F = \frac{c^2 \cdot \sin. A \cdot \sin. B}{2 \cdot \sin. B} = \frac{c^2 \cdot \sin. A}{2}$$

2) Es sey $\angle A = \angle B$; so ist

$$\text{Sin}\, C = \sin. 2A = 2 \sin. A \cdot \cos. A, \text{ also}$$

$$F = \frac{c^2 \cdot \sin. A \cdot \sin. A}{2 \cdot 2 \sin. A \cdot \cos. A}$$

$$= \frac{c^2 \cdot \sin. A}{4 \cdot \cos. A} = \frac{c^2 \cdot \text{tang}. A}{4}$$

Beispiele: Es sey für den ersten Fall, c = 135 Ruthen (wie vorher), $\angle A = 128^0 25'$, der $\angle B = \angle C = 25^0 47' 30''$;

so ist 2 . log. 135 = 4,2606676

log. sin. $128^0 25'$ = 0,8940461 — 1

+ 5,1547137 — 1

— log. 2 = 0,3010300

log. F = 3,8536837

F = 7139,76 □Ruthen.

Es sey für den zweiten Fall, $c = 135$, $\angle = A = \angle B = 24^0 30'$,

so ist 2 log. 135 = 4,2606676

log. tang. $24^0 30'$ = 0,6587041 — 1

\+ 4,9193717 — 1

— log. 4 = 0,6020600

also log. F = 3,3173117, daher

F = 2076 □Ruthen 40,3 □Fuß.

§. 22.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel, z. B. b, c, A gegeben; daraus werde der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet.

Auflösung: Auch hier kömmt es nur auf die trigonometrische Bestimmung der Höhe CD an, indem man c als Basis betrachtet.

Nun ist $b : CD = 1 : \sin. A$, also $CD = b . \sin. A$;

Folglich der Flächeninhalt $F = \frac{c . CD}{2} = \frac{bc . \sin. A}{2}$

Zusatz: Ist $b = c$, so ist $F = \frac{c^2 . \sin. A}{2}$, wie im Zusatz der vorigen Aufgabe.

Beispiel: Es sey gegeben: b = 863 Fuß, c = 376 Fuß, und $\angle A = 157^0 13'$; gesucht: F.

Hier ist + log. 863 = 2,9360108

\+ log. 376 = 2,5751878

+log. $157^0 13'$ od. log. $22^0 47'$ = 0,5879885 — 1 (eigentlich 9, — 10,)

log. F = 5,0991871

Also F = 12565,71 □Fuß = 12565 □Fuß 71 □Zoll.

log F = 5,0991871 − log 2 = 4,7981571, also

F = 62828,56 □Fuß.

Anmerkung. Es könnte auch nach obiger Formel aus dem Flächeninhalt, einer Seite und einem anliegenden Winkel die zweite anliegende Seite, oder aus dem Flächeninhalt und zweien Seiten der von denselben eingeschlossene Winkel (dieser jedoch zweideutig) berechnet werden; solche Fälle kommen jedoch in der Praxis schwerlich jemahls vor.

§. 23.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind alle drei Seiten a, b, c, nach irgend einem Längenmaß in Zahlen gegeben; daraus soll der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden.

Auflösung: Es kommt hier darauf an, für eine Seite des Dreiecks c als Basis betrachtet, die zugehörige Höhe CD durch eine Gleichung (Funktion) der Größen a, b, c so auszudrücken, daß die Berechnung der Größe $\frac{c \cdot CD}{2}$ sich einer rein logarithmischen Behandlung unterwerfen läßt.

Nennen wir den Fächeninhalt des Dreiecks F, die Summe der bekannten drei Seiten, nehmlich $a + b + c = S$; so ist die analytische, jedoch nicht trigonometrische, Gleichung oder Funktion zwischen diesen veränderlichen Größen folgende:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[S \cdot (S - 2a) \cdot (S - 2b) \cdot (S - 2c)]}$$

oder auch

$$= \sqrt{[\tfrac{S}{2} \cdot (\tfrac{S}{2} - a) \cdot (\tfrac{S}{2} - b) \cdot (\tfrac{S}{2} - c)]}$$

Beweis: Es ist der Abschnitt $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

(nach dem Lehrsatz im §. 13),

$$CD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - \left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\}^2,$$

oder weil sich die Differenz zweier Quadrate immer in zwei Factoren von dieser Gestalt zerlegen läßt: $m^2 - n^2 = (m+n).(m-n)$,

$$CD^2 = \left\{a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\}$$

$$= \left\{\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}\right\}$$

$$= \left\{\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{\frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}\right\}$$

$$= \frac{(a+c+b).(a+c-b)}{2c} \times \frac{(b+a-c).(b-a+c)}{2c}$$

$$\text{Also } CD = \sqrt{\left\{\frac{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b-c)}{4c^2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[S.(S-2a).(S-2b).S-2c]} \text{ für } a+b+c = S.$$

Da nun der Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{c.CD}{2}$, so ist nach gehöriger Substitution des für CD^2 gefundenen Werthes:

1) $F = \frac{1}{4}\sqrt{[S.(S-2a).(S-2b).(S-2c)]}$

oder, wenn man den Nenner 4 unter das Wurzelzeichen als $16 = 2.2.2.2$ bringt,

2) $F = \sqrt{\left[\left(\frac{S}{2}\right).\left(\frac{S}{2}-a\right).\left(\frac{S}{2}-b\right).\left(\frac{S}{2}-c\right)\right]}$.

Diese zweite Formel ist zu wirklichen Berechnun=

gen die brauchbarste, wenn $\frac{s}{2}$ eine ganze Zahl giebt; wiedrigenfalls ist die erste vorzuziehen.

Die vier Factoren unter dem Wurzelzeichen sind durch gemeine Addition und Subtraction sehr schnell zu erhalten; dann aber geht, wie man leicht erkennt, die Rechnung logarithmisch weiter.

Diese Methode, aus den Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu berechnen, ist sehr nützlich und anwendbar, indem dadurch die Winkel und Senkrechten, so wie in der Ausübung eine verjüngte Zeichnung der großen Dreiecke im Felde, auf Papier ganz entbehrlich gemacht werden. Der Satz ist übrigens in der Geschichte der Mathematik berühmt; *Montucla* (Histoire des Mathematiques etc.) setzt seine Erfindung in frühere Zeiten, etwa ins 8te Jahrhundert; mit Beweis in einer gedruckten Schrift kommt der Satz zuerst gegen das Ende des 15ten Jahrh. vor; er wird von Einigen vielleicht ohne Grund dem Tartalea zugeschrieben, welcher ihn ebenfalls mit Beweis in seinem Buche: Trattato de numeri e misure, vorträgt.

Die Formel selbst enthält keine goniometrische Funktion, und ist also nicht trigonometrisch, wenn das Wort Trigonometrie in der gewöhnlichen beschränkten Bedeutung genommen wird; sie gehört aber als ein rein analytischer Ausdruck allerdings hieher. Der Beweis für die gefundene Formel läßt sich übrigens auch theilweise goniometrisch = trigonometrisch finden.

Es ist nehmlich

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ (Siehe §. 20), also

$$1 + \cos. A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a).(b+c-a)}{2bc}$$

$$1 - \cos. A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{2bc}$$

Die erste Gleichung mit der zweiten multiplicirt giebt:

$$1 - \cos.^2 A = \sin.^2 A$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{4b^2c^2}$$

daher $\sin. A = \frac{1}{2bc}bc\sqrt{S \cdot (S-2a) \cdot (S-2b) \cdot (S-2c)}$.

Nun ist $F = \frac{bc \cdot \sin. A}{2}$ (nach der Aufgabe im §. 22),

also $F = \frac{1}{4}\sqrt{S \cdot (S-2a) \cdot (S-2b) \cdot (S-2c)}$,

wie vorher.

Sind die Seiten a, b, c in kleinen Zahlen gegeben, so berechnet man das Product unter dem Wurzelzeichen auf gewöhnliche Art; im Gegentheil verrichtet man lieber die ganze Rechnung durch Logarithmen.

Beispiel: Es seyen gegeben $a = 317$ Fuß, $b = 523$ F., $c = 267$ F.; gesucht F. Hier wird

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{1107 \cdot 473 \cdot 61 \cdot 573} = \sqrt{\frac{1107 \cdot 473 \cdot 61 \cdot 573}{16}}$$

Nun ist $+ \log. 1107 = 3,0441476$
$+ \log. 473 = 2,6748611$
$+ \log. 61 = 1,7853298$
$+ \log. 573 = 2,7581546$
$+ 10,2624931$
$- \log. 16 = 1,2041200$
$+ 9,0583731$, durch 2 dividirt, giebt:

$\log. F = + 4,5291865$ nahe.
also $F = 33821,01$ □Fuß äußerst nahe.

Zusatz. Bisweilen findet es sich, daß zwei oder auch alle drei Seiten des Dreiecks einander gleich sind; dann wird die Berechnung etwas kürzer.

1) Wenn zwei Seiten gleich sind, z. B. $b = c$; so wird:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + 2b) \cdot (2b - a) \cdot a^2}$$
$$= \tfrac{a}{4}\sqrt{(2b + a) \cdot (2b - a)}$$

2) Wenn alle drei Seiten gleich sind, $a = b = c$, so wird:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a \cdot a \cdot a \cdot a} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a^4} = \tfrac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$
$$\log. F = 2 \log. a + \tfrac{1}{2} \log. 3 - \log. 4, \text{ u. s. w.}$$

§. 24.

Abgeleitete Aufgaben. (Fig. 10.)

Auf die Berechnungen der ebenen Dreiecke, wie sie in den vorgetragenen Aufgaben gelehrt worden sind, gründen sich die Berechnungen aller ebenen geradlinigen Figuren, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Es würde zu weit führen, wenn wir alle Aufgaben der Art hier anführen wollten. Größtentheils hat die Anwendung der vorhergegangenen trigonometrischen Sätze auf zusammengesetztere Probleme keine Schwierigkeit; übrigens sollen in der Folge, wo geodätische Aufgaben es verlangen, die Wege und Methoden der trigonometrischen oder analytischen Rechnung überall angezeigt werden. Beispielshalber mögen indessen ein paar Aufgaben zusammengesetzter Art hier Platz finden.

Aufgabe.

Von einem Viereck ABCD sind die Diagonalen AD, BC, und einer oder der andere Winkel, welche diese an ihrem Durchschnittspunkte M bilden, gegeben;

daraus soll der Flächeninhalt des Vierecks berechnet werden.

Auflösung: Man nehme BC als die Basis der beiden Dreiecke ABC, BCD an, so ist AE die Höhe des einen, DF die Höhe des andern Dreiecks.

Es ist AM : AE = 1 : sin. M; (M kann der stumpfe oder spitze Nebenwinkel bei M seyn); also AE = AM . sin. M.

Eben ist DF = DM . sin. M.

$$\text{Also ist } \triangle ABC = \frac{BC \,.\, AM \,.\, \sin. M}{2}$$

$$\triangle BCD = \frac{BC \,.\, DM \,.\, \sin. M}{2};$$

$$\text{folglich die Fläche von } ABCD = \frac{BC \,.\, AD}{2} \,.\, \sin. M.$$

Aufgabe. (Fig. 11.)

Von einem Viereck ABCD sind drei zusammenstoßende (nach einander folgende) Seiten, a,b,c und die Winkel A, B, welche je zwei dieser Seiten bilden, gegeben; daraus werde der Flächenraum des Vierecks berechnet.

Auflösung: Wir wollen annehmen, die zwei Seiten a, c schneiden sich verlängert in E; dadurch entstehen zwei Dreiecke, die sich in folgender Art berechnen lassen. Es ist $\angle E = 180 - (A + B)$ bekannt; ferner ist:

$$BE : b = \sin. A : \sin. E, \text{ also } BE = \frac{b \,.\, \sin. A.}{\sin. E}$$

$$AE : b = \sin. B : \sin. E, \text{ also } AE = \frac{b \,.\, \sin. B.}{\sin. E}$$

die Fläche des $\triangle ABE = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 \cdot \sin.A \cdot \sin.B}{\sin.E}$

(nach §. 21.)

$$CE = BE - a = \frac{b \cdot \sin.A}{\sin.E} - a,$$

$$DE = AE - c = \frac{b \cdot \sin.B}{\sin.E} - c.$$

Die Fläche des Dreiecks $CDE = \frac{1}{2} . CE . DE . \sin.E$; substituirt man für CE, DE die dafür gefundenen Werthe, so wird nach gehöriger Reduction

Fläche $\triangle CDE =$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b.\sin.A.\sin.B}{\sin.E} - ab.\sin.B - bc.\sin.A + ac.\sin.E\right]$$

Also der Flächeninhalt des Vierecks

$$ABCD = \triangle ABE - \triangle DCE$$
$$= \frac{1}{2}\left[ab . \sin.B + bc . \sin.A - ac . \sin.E\right]$$

Sind die Seiten a, c parallel, so wird $\sin.E = \sin.(A+B) = o$, und $\sin.A = \sin.B$; dann wird offenbar der Flächeninhalt des Vierecks nach der angeführten Formel $= \frac{1}{2}.(ab+bc).\sin.A = \frac{1}{2}b(a+c) . \sin.A.$

Die Berechnung für den Fall, wo a, b, c, A, B gegeben sind, aber die zwei Seiten a, c verlängert nicht in E sondern in einer entgegengesetzten Richtung in Beziehung auf b zusammenlaufen, kann jedem Leser überlassen bleiben.

Zweite Abtheilung.

Sphärische Trigonometrie.

Allgemeine Vorkenntnisse.

§. 25.

Die sphärische Trigonometrie lehrt die Formeln oder goniometrischen Gleichungen, vermittelst deren solche Dreiecke berechnet werden, welche durch drei einander schneidende Bogen größter Kreise auf einer Kugeloberfläche gebildet werden. Sie beruhet ganz und gar auf den in der zweiten Abtheilung vorgetragenen Sätzen und Gleichungen der ebenen Trigonometrie, so wie auf einigen Lehrsätzen der Elementargeometrie, die wir hier als bekannt voraussetzen, und ohne deren richtige, ganz anschauliche Erkenntniß die sphärische Trigonometrie durchaus nicht deutlich begriffen wird.

Diese Sätze der Elementargeometrie, mit denen man zuvörderst aufs Reine gekommen seyn muß, will ich hier nur kurz ohne eine vollständige Auseinandersetzung andeuten, weil ich annehmen darf, daß bei weitem den meisten Lesern dieselben schon hinlänglich bekannt sind.

Wenn eine Kugel durch eine unbegrenzte Ebene durchschnitten wird, so muß die ebene Durchschnitts-

fläche an der Kugel ein Kreis seyn. Der Beweis ist ganz elementarisch und selbst für Anfänger leicht genug.

Kugelschnittsflächen sind gleich an Flächenraum und Peripherie, wenn sie vom Mittelpunkt der Kugel gleich weit abstehen; dieser Abstand wird bestimmt durch eine Senkrechte vom Mittelpunkt der Kugel auf die Kreisfläche des Durchschnitts. Die Kugelschnittsflächen sind um so größer, je näher sie dem Mittelpunkt der Kugel sind, und umgekehrt. Kugelschnitte, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind also die größten, und ihre Peripherieen geben auf der Kugeloberfläche, nach dem gebräuchlichen Ausdruck, **größte Kreise**.

Zwei **größte Kreise**, deren Ebenen nehmlich durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, halbiren einander wechselseitig; denn die Durchschnittslinie beider Kreisebenen geht durch den Mittelpunkt der Kugel, ist folglich ein Durchmesser für beide größte Kreise u. s. w.

Gedenkt man sich einen Durchmesser der Kugel, der durch den Mittelpunkt derselben läuft, senkrecht auf eine größte Kreisfläche (Durchschnittsebene) der Kugel, so heißt jener senkrechte Durchmesser eine **Achse der Kugel**, aber nur in Beziehung auf diese größte Kreisfläche und ihre Peripherie. Für eine andre größte Kreisfläche der Kugel findet auch eine andre Achse Statt; es kann unzählige größte Kreise, also auch unzählige Achsen nach verschiedenen Lagen in einer Kugel geben. Gewöhnlich nimmt man aber einen bestimmten größten Kreis an, dann giebt es für diesen auch nur eine Achse; in Beziehung auf diese Achse in bestimmter Lage kann allgemein die Peripherie des dazu gehörigen größten Kreises der **Aequator** (Gleicher) der Kugel heißen, weil die Fläche dieses größten Kreises die ganze Kugel in zwei gleiche congruente Theile zerlegt.

Die Endpunkte irgend einer bestimmt angenommenen Achse, welche ein Durchmesser der Kugel ist, heißen die Pole dieser Achse oder des dazu gehörigen Aequators, und in dieser Verbindung auch die Pole der Kugel selbst.

Der eine oder andre Pol einer Kugel (in der erwähnten Bedeutung) ist von jedem Punkt seines Aequators (als Peripherie auf der Kugeloberfläche betrachtet) gleich weit entfernt, sowohl in gerader Linie (Sehne) als auch im Bogen eines größten Kreises; dieser Bogen beträgt nehmlich immer $1\,R = 90^0$. Es läßt sich dieser Satz sehr leicht anschaulich machen und erweisen.

Ein größter Kreis, der durch die Pole eines andern bestimmten größten Kreises geht, steht senkrecht auf diesem, weil offenbar der Neigungswinkel der beiden einander schneidenden größten Kreisebenen gleich $1\,R = 90^0$ ist. Der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen wird bekanntlich bestimmt durch zwei Senkrechte, welche in und von beiden Ebenen nach irgend einem gemeinschaftlichen Punkt der geraden Durchschnittslinie gezogen werden, und mit dieser Durchschnittslinie einen rechten Winkel bilden.

Umgekehrt, wenn ein größter Kreis in einer Kugel auf einem andern senkrecht steht, oder diesen unter einem Neigungswinkel $= 90^0$ schneidet, so geht dieser zweite Kreis durch die Pole des ersten.

Stehen daher zwei einander schneidende größte Kreise der Kugel beide senkrecht auf einem dritten größten Kreise, so müssen die Durchschnittspunkte jener die beiden Pole des dritten größten Kreises seyn.

Der Diedrische Winkel Neigungswinkel) von zwei größten einander schneidenden Kreisflächen einer Kugel heißt ein sphärischer Winkel. Es ist ganz klar, daß dieser sphärische Winkel sich durch das Gradmaß des Bogens bestimmen läßt, welcher am Aequator

durch die zwei einander schneidenden größten Kreise begrenzt (abgeschnitten) wird, wenn man sich zu diesem Aequator die Durchschnittspunkte der zwei größten Kreise als Pole gedenkt. Jener sphärische Winkel wird geometrisch auch bestimmt (construirt) durch zwei Tangenten, welche man sich an die beiden einander schneidenden Kreisebenen in ihrem Durchschnittspunkte vorstellen muß, weil diese Tangenten zwei Senkrechte sind, die von beiden Ebenen nach einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte derselben gehen, und dadurch immer die Größe eines Diedrischen Winkels geometrisch bestimmt wird, wie in der Elementargeometrie von der Lage der Ebenen gezeigt wird.

Zwei sphärische Nebenwinkel sind zusammen = 2 R = 180°, auch sind zwei sphärische Scheitelwinkel einander gleich. Dies läßt sich eben so beweisen, wie von den Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln in einer Ebene; man darf sich nur zum Durchschnittspunkt zweier größten Kreise, als einem Pol, die zugehörige Aequator-Kreisebene gedenken, so entstehen in dieser Ebene durch die zwei einander schneidenden größten Kreise der sphärischen Nebenwinkel und Scheitelwinkel als Winkel in einer Ebene.

Wenn zwei größte Kreise einander schneiden, so liegen die beiden Durchschnittspunkte, als Pole in einer Bogenentfernung von 180° von einander, wie oben erinnert wurde. Werden solche nun, ehe sie im zweiten Durchschnittspunkt (Pol) zusammenkommen, von einem dritten größten Kreise, der nicht durch die Pole jener geht, geschnitten, so entsteht ein sogenanntes sphärisches Dreieck, welches also ein Stück der Kugeloberfläche ist, das von Bogenstücken dreier größten Kreise begrenzt wird, deren jeder kleiner als 180 ist.

Wenn man also annimmt, daß jede Seite eines sphärischen Dreiecks kleiner als ein halber größter Kreis

ist, nehmlich kleiner als 180°, so ist die Summe der Bogenlängen der drei Seiten in Graden weniger als sechs rechte Winkel.

Rechtwinklicht heißt ein sphärisches Dreieck, wenn es einen oder auch mehrere rechte Winkel als sphärische oder diedrische Winkel enthält. Man sieht leicht ein, daß die Summe der drei sphärischen Winkel nicht beständig, wie bei ebenen Dreiecken, sondern veränderlich ist; es läßt sich darum aus zwei gegebenen sphärischen Winkeln allein, der dritte nicht bestimmen.

Die Seiten (Bogen) eines sphärischen Dreiecks sind Maße (in Graden ꝛc.) von den ebenen Winkeln am Mittelpunkte der Kugel, welche von zwei Halbmessern, vom Mittelpunkt der Kugel nach den Grenzpunkten der Bogen gezogen, gebildet werden; und umgekehrt diese ebenen Winkel sind Maße der zugehörigen Bogen (Seiten) des sphärischen Dreiecks. Es kommen also bei Betrachtung solcher Dreiecke nur Winkel, ebene und sphärische (diedrische Neigungswinkel) vor, aber keine Längenmaße, wie bei ebenen Dreiecken, deren Seiten gerade Linien sind. Hieraus erhellt, daß in die Berechnung sphärischer Dreiecke nur goniometrische Größen oder Winkelfunktionen eingehen; dadurch wird aber eben der Kalkul der sphärischen Trigonometrie verwikkelter und schwieriger.

Die drei einander schneidender Ebenen größter Kreise (Kreissectoren), welche sich im Mittelpunkt der Kugel vereinigen, und auf der Oberfläche derselben von drei Bogen (Seiten(begrenzt werden, bilden eine besondre Art dreiseitiger Pyramide, deren Basis die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, und deren Spitze in den Mittelpunkt der Kugel fällt; der körperliche Winkel dieser Pyramide, aus drei ebenen Winkeln der Kreissectoren bestehend, muß immer weniger als 4 rechte Winkel betragen, wie dies in der Elementargeo-

metrie von jedem körperlichen Winkel gezeigt wird; daher sind auch die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks weniger als 4 rechte; auch müssen zwei Seiten desselben zusammengenommen größer als die dritte Seite seyn.

Daß die Summe der diedrischen oder sphärischen Winkel eines sphärischen Dreiecks immer weniger als sechs rechte, aber auch mehr als zwei rechte Winkel betragen müsse, wird aus nachfolgendem Hülfssatz erwiesen werden.

Die sphärische Trigonometrie, als eine mathematische Wissenschaft, enthält die allgemeinen goniometrischen Gleichungen (Funktionen) zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks, und zeigt die Methoden, vermittelst jener Gleichungen, die man auch Lehrsätze nennen kann, aus drei gegebenen Stücken eines solchen Dreiecks die übrigen trigonometrisch zu berechnen. Bevor wir die eigentlichen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie vornehmen, muß folgender Satz vorausgeschickt werden.

§. 26.

Hülfssatz. (Fig. 12.)

Man stelle sich vor *), durch drei einander schneidende Bogen größter Kreise sey auf einer Kugelover-

---

*) Wer sich die Sätze der sphärischen Trigonometrie ganz deutlich machen will, muß schlechterdings Modelle hierzu brauchen, nehmlich eine nicht allzu kleine Kugel (etwa 4 bis 5 Zoll im Durchmesser) von hartem Holz, worauf sich sphärische Dreiecke von verschiedener Gestalt ohne Schwierigkeit verzeichnen lassen; man zeichnet sie jedoch mit einem Stoff,

fläche das sphärische Dreieck A B C gebildet; die sphärischen (diedrischen) Neigungswinkel mögen hier und weiterhin immer A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten oder Bogen aber um der Gleichförmigkeit der Bezeichnung willen, immer a, b, c heißen; man nehme ferner die Winkelspitzen A, B, C als die Pole (§. 25.) von drei andern größten Kreisen an, oder denke sich aus A, B, C in einer Bogenentfernung von 90^0 größte Kreisbogen beschrieben, welche einander auf der Kugeloberfläche in E, D, F schneiden, so ist auch E D F ein sphärisches Dreieck. Dieses Dreieck E D F steht mit dem Dreieck A B C in einem solchen Verhältniß (wechselseitigen Relation), daß die Seiten (Bogen) des erstern die gegenüberliegenden Winkel des andern zu $2R = 180^0$ ergänzen, und umgekehrt die Seiten des Dreiecks A B C die gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks D E F zu 180^0 ergänzen, z. B. $EF + A = 180^0$ u. s. w. In dieser Beziehung wird das Dreieck D E F das Ergänzungsdreieck (franz. triangle supplémentaire) vom Dreieck A B C genannt. Die Construction der Figuren auf einer Kugel hat keine Schwierigkeit, und kommt einer klaren evidenten Einsicht des Satzes sehr zu Hülfe.

Beweis: Der Bogen E F ist aus A in einer Bogenentfernung von 90^0 beschrieben, also ist A der Pol des Bogens E F, der in dieser Verbindung Aequator heißen kann; daher muß auch der Bogen eines größten Kreises von A

---

der sich leicht von der Kugeloberfläche wieder vertilgen läßt, um für andere Fälle andere sphärische Dreiecke auf die Kugeloberfläche zeichnen zu können; außerdem braucht man hohle Kugelpyramiden aus drei Kreissectoren von gleichem Halbmesser, zusammengefügt. Ein Weiteres hierüber sage ich im folgenden §. 27.

nach E, nehmlich Bogen AE = 90° seyn (nach §. 25.).

Eben so hat der Bogen DE den Punkt C zu seinem Pol, also ist auch der Bogen CE (eines größten Kreises) = 90°.

Da nun die Bogen AE und CE = 90° sind, so ist offenbar E ein Pol des Bogens AC oder auch GI (Aequator). Daraus folgt (nach §. 25), daß der Aequatorbogen AC (in Graden) das Maß des sphärischen Winkels AEC, und der Aequatorbogen GI das Maß des Winkels GEI = E ist.

Auf ganz gleiche Weise läßt sich zeigen, daß F der Pol des Bogens PR, und D der Pol des Bogens HQ ist;

also der Bogen PR das Maß des Winkels F,
= = = HQ = = = = D.

Da E der Pol des Bogens GI und
F = = = = PR, so ist

Bog. EI = 90°, auch Bogen FR = 90°;

also EI + FR = 180° oder
EI + IF + IR = 180°, also auch
EF + IR = 180°.

Nun ist IR das Maß (in Graden) des sphärischen Winkels A.

Daraus folgt, daß EF + A = 180° ist, nehmlich der sphärische Winkel A wird durch die gegenliegende Seite EF des sphärischen Ergänzungsdreiecks zu 180° ergänzt.

Eben so kann man beweisen, daß B + DF = 180° und C + ED = 180° ist.

Ferner ist HC = 90°, BQ = 90°, also
HC + BQ = 180°, also auch
HQ + BC = 180°.

Nun ist HQ das Maß des sphärischen Winkels D,
folglich D + BC = 180°,

nehmlich die Seite BC ergänzt den gegenüberliegenden Winkel D des Ergänzungsdr.iecks zu 180°. Eben so erhellt, daß E + AC und F + AB = 180° ist.

Schlußfolge: Da A + EF + B + DF + C + ED = 6R; und die Bogen oder Seiten des sphärischen Dreiecks EDF, nehmlich EF+DF+ED kleiner als 4R. (in Gradmaß) sind, so müssen die sphärischen Winkel A + B + C zum wenigsten größer als 2R, jedoch in jedem Fall kleiner als 6R seyn.

Hauptlehrsätze der sphärischen Trigonometrie,

oder

goniometrische Gleichungen

zur Auflösung aller sphärischen Dreiecke.

Diese gründen sich insgesammt auf die früher vorgetragenen Sätze der ebenen Trigonometrie und die dabei gegebenen goniometrischen Formeln.

§. 27.

Lehrsatz. (Fig. 13 und 14.)

In jedem sphärischen Dreieck ABC (dessen Winkel mit den Buchstaben A, B, C und die denselben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden) verhalten sich die Sinus der Seiten (in Gradmaß) so gegen einander, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Ister Fall: Das sphärische Dreieck ABC (Fig. 13.) sey bei B rechtwinklicht; so ist sin. a : sin. c = sin. A : sin. C u. s. w.

Beweis: Man denke sich den Mittelpunkt M

der Kugel, auf welcher das sphärische Dreieck ABC beschrieben ist, die Halbmesser der Kugel AM, BM, CM, und durch ABM, BCM, ACM Ebenen gelegt, welche offenbar Kreissectoren sind, deren Halbmesser der Kugelhalbmesser ist. Auf solche Weise erhält man eine hohle dreiseitige Pyramide, deren Basis die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks und deren Spitze M der Mittelpunkt der Kugel ist. Der Neigungswinkel der Kreissectoren (Ebenen) ACM und ABM ist in Graden gleich dem sphärischen Winkel A u. s. w.; der ebene Winkel CMB des Kreissectors BMC ist in Graden gleich der Seite (Bogen) a u. s. w. Ist nun der Neigungswinkel der Ebenen ABM und BCM = 1R = 90°, so ist der sphärische Winkel B = 1R = 90°. Das sphärische Dreieck ABC heißt in diesem Falle ein rechtwinklichtes, die Seite b, welche dem rechten Winkel B gegenüberliegt, heißt (wie in der ebenen Trigonometrie) die Hypotenuse, die beiden andern Seiten a, c aber heißen die Catheten des sphärischen Dreiecks, wenn nehmlich die Winkel A und C nicht auch rechte Winkel sind, welcher Fall auch möglich ist.

In der hohlen sphärischen Pyramide ABCM gedenke man sich CF senkrecht auf BM in der Ebene BCM, ferner FE senkrecht auf AM in der Ebene ABM; durch CFE stelle man sich eine Ebene gelegt vor, welche die Ebene ACM in der geraden Linie CF schneidet, so ist auch CE senkrecht auf AM in der Ebene ACM (nach der Lehre von den Ebenen in der Elementargeometrie).

Dieser Construction zufolge ist:

der diedrische Neigungswinkel CEF = A
" " " CFE = B = 90°.
CE = sin. CMA = sin. b, für Sin. tot. den Halbmesser der Kugel gesetzt,
CF = sin. CMB = sin. a " " " " "

Das ebene Dreieck CFE ist bei F rechtwinklicht, folglich ist:

CE : CF = sin. CFE : CEF oder

sin. b : sin. a = sin. B : sin. A = sin. tot. : sin. A

Eben so ist sin. b : sin. c = sin. B : sin. C = sin. tot. : sin. C.

Daraus folgt auch:

sin. a . sin. c. = sin. A : sin. C, oder durch Versetzung

sin. a : sin. A = sin. c : sin. C.

II<u>ter</u> Fall: Das Dreieck ABC (Fig. 14.) sey schiefwinklicht; d. h. keiner seiner Winkel A, B, C sey = 90°. Auch hier verhalten sich die Sinus zweier Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, z. B. sin. a : sin. b = sin. A : sin. B u. s. w.

Beweis: ABC sey ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel, deren Mittelpunkt M ist; AM, BM, CM Halbmesser der Kugel; ABCM eine hohle Kugelpyramide, deren Seitenflächen die Kreissectoren ABM, ACM, BCM sind. Von der Winkelspitze C sey auf die gegenüberliegende Seitenfläche ABM eine Senkrechte CD gefällt, DE in der Ebene ABM sey senkrecht auf AM und DF senkrecht auf BM; durch CDE und CDF denke man sich Ebenen gelegt, so stehen die geraden Durchschnittslinien CE und CF senkrecht auf AM und BM.

Der Halbmesser der Kugel AM = BM = CM sey = 1.

Der Neigungswinkel CED ist = dem sphärischen Winkel A;

der Neigungswinkel CFD ist = dem sphärischen Winkel B;

CE = sin. AMC = sin. b; ME = cos. b,

CF = sin. BMC = sin. a; MF = cos. a.

Nun sind die ebenen Dreiecke CDE, CDF bei D rechtwinklicht;

also ist in dem ersten: CE : CD = 1 : sin. A,
in dem zweiten: CF : CD = 1 : sin. B.

---

also CE : CF = sin. B : sin. A, oder
sin. b : sin. a = sin. B : sin. A, oder
sin. a : sin. b = sin. A : sin. B.

Daraus folgt auch sin. a . sin. B = sin. b . sin. A u. s. w.

Durch eine ganz ähnliche Construction und ähnliche Proportionen zweier ebenen Dreiecke läßt sich darthun, daß auch ist:

sin. a : sin. c = sin. A : sin. C und
sin. b : sin. c = sin. B : sin. C.

Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn auch die Senkrechte CD nicht auf die Ebene des Kreissectors ABM selbst, sondern auf ihre Erweiterung (Verlängerung) über BM oder AM hinaus fällt, welches geschieht, wenn der sphärische Winkel B oder A größer als 90^0 ist; der Beweis wird in diesem Falle auf ganz gleiche Art geführt.

§. 28.

Modelle hierzu.

Es ist unglaublich, wie sehr durch zweckmäßig eingerichtete Modelle die deutliche evidente Einsicht der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie erleichtert wird, selbst für weniger gute Köpfe. Eines Theils ist es wohl der dunkle, unsystematische Vortrag dieser Sätze in den meisten Lehrbüchern, andern Theils auch das ganz Unanschauliche in den zu den Sätzen gehörigen geometrischen Figuren, wenn sie auf einer Ebene construirt werden, wodurch sich so viele junge Leute von

dem ernstlichen Studium der sphärischen Trigonometrie, in dem falschen Wahn, sie sey schwülstig oder gehöre zur höhern Mathematik, zurückschrecken lassen; viele andere junge Leute, die diese Wissenschaft erlernt zu haben vorgeben, verstehen sie aus diesem Grunde wohl nur halb, und können daher eine strengere Prüfung nicht bestehen, wie mich mehrjährige Erfahrungen an meinen Zuhörern haben bemerken lassen.

Es ist wahr, daß die sphärische Trigonometrie verwickelter und weitläufiger als die ebene ist; ich behaupte aber, daß das Verstehen jener nicht viel schwerer ist, als das der andern, wenn ein gründliches Studium dieser letztern vorausgeht, und die Anleitung zu jener, mündlich oder schriftlich, auf einem möglichst einfachen systematischen Wege ohne viele Worte, mit Beihülfe guter Modelle, geschieht. So behandelt, wird die sphärische Trigonometrie nicht anders als die ebene ein Theil der niedern Mathematik, und kann auch von Anfängern, die sich bis zur eigentlich höhern Mathematik nicht erheben wollen, oder um ihres Berufes willen nicht zu erheben brauchen, füglich mit erlernt werden können; dies um so mehr, da die sphärische Trigonometrie auch der niedern Feldmeßkunst und der populären Astronomie sehr hülfreiche Dienste leistet.

Außer einer Kugel von etwa 4 bis 5 Zoll im Durchmesser, worauf sich leicht größte Kreise nach allen Lagen und demnach sphärische Dreiecke von jeder Art und Gestalt mit einem Stoff, der sich wieder von der Kugel abwischen läßt, — ich lackire meine Kugeln und zeichne dann die größten Kreise mit Tusche — vorzeichnen lassen, bediene ich mich zur Erläuterung meiner Vorträge eines eigenen Modells, welches sich ein Jeder ohne besondre Kunstgriffe selbst anfertigen kann.

Aus guter, mäßig starker, so eben als möglich geschlagener und mit weißem Papier überzogener Pappe

mache man (Fig. 13 und 14) drei Kreissectoren von gleichem Halbmesser etwa 4 bis 5 Zoll lang, nehmlich BCM, ABM, ACM; die zugehörigen Bogen a, b, c können eine verschiedene Größe erhalten, nach der Angabe des zu erweisenden Satzes; um diese Sectoren zu erhalten, kann man auf der gehörig zugerichteten Pappe einen Kreis beschreiben, durch gezogene Halbmesser die Kreissectoren (Ausschnitte) begrenzen, und nun mit einem scharfen Messer genau ausschneiden. Diese drei Kreissectoren mit ihren Kanten zusammengefügt, geben die sphärische Pyramide ABCM; die Zusammenfügung an den Kanten AM, BM, CM kann mittelst eines feinen Kleisters und schmaler weißer Papierstreifen geschehen; vor dieser Zusammenfügung bestimmt man versuchsweise den Punkt D, in welchen die Senkrechte von C auf die Ebene AMB (oder deren Erweiterung, Verlängerung) fällt, ziehet mit Tusche DE und DF senkrecht auf AM und BM, sodann von den so bestimmten Punkten E, F gerade Linien nach C in den Ebenen ACM, BCM; zur Erläuterung des folgenden Lehrsatzes zieht man noch in der Ebene ABM die geraden Linien EG ## DF und DH ## BM; hierauf fügt man die Kreissectoren an ihren Kanten fest zusammen, und spannt endlich zwischen C und D auf eine leicht zu erachtende Weise einen Faden von schwarzer feiner Seide aus, welcher die gerade senkrechte Linie CD anschaulich macht. So erhält man ein Modell, welches die ebenen und diedrischen Winkel des Dreiecks ABC, ihre goniometrischen Funktionen, den Halbmesser der Kugel, die Lage der ebenen Dreiecke, welche zum Beweise dienen, und die trigonometrischen Proportionen dieser Dreiecke sehr anschaulich vorstellt, und dadurch das Verstehen der Lehrsätze und Gleichungen selbst ganz ungemein erleichtert. Es versteht sich übrigens von selbst, daß man in das Modell die nöthigen Buch-

staben schreibt, wie sie in unserer Figur stehen. Die geraden Linien CE, CF ꝛc. kann man zum Ueberfluß an die innern und äußern Seitenflächen der hohlen Kugelpyramide zugleich zeichnen; doch wird es hinreichen, wenn sie an den innern Flächen stehen. Soll das sphärische Dreieck bei B rechtwinklicht werden, wozu der Bogen AC versuchsweise leicht gefunden wird ic., so fällt die Senkrechte CD (Fig. 14) in die Lage CF (Fig. 13), nehmlich in die Ebene des Kreissectors BCM, folglich fällt hier die Senkrechte DF (Fig. 14) weg, so wie auch DH # BM.

Sollte ein Winkel z. B. B ein stumpfer seyn, so würde die Senkrechte CD (durch einen Faden vorgestellt) in die Erweiterung der Ebene ABM über BM hinausfallen. Die Construction des Modells für diesen Fall bedarf nach dem Gesagten keiner besondern Erläuterung.

Außer dieser Art Modelle und einer Kugel bedarf man zur Erläuterung der sphärischen Trigonometrie keines andern Hülfsmittels. Will man einen sphärischen Winkel, z. B. C noch auf eine andere Art anschaulich machen, so stelle man durch irgend eine Vorrichtung zwei Tangenten an die Kreissectoren ACM, BCM in ihrem Durchschnittspunkte C vor; der Winkel, welchen diese Tangenten an C einschließen, ist in Gradmaß gleich dem sphärischen Winkel (diedrischen Neigungswinkel) C.

Mit Hülfe solcher Modelle, und nach einer Methode, wie man hier die sphärische Trigonometrie abgehandelt findet, wird es jedem Lehrer, so gut wie mir, gelingen, ihren Zuhörern diese, fast allgemein für sehr schwer und schwülstig geachtete, mathematische Disciplin eben so klar, leicht und angenehm zu machen, wie die ebene Trigonometrie, welche jene begründet. Auf eine

einfache, zweckmäßige Methode kommt allerdings sehr viel an.

§. 29.

Lehrsatz. (Fig. 13 und 14.)

In einem sphärischen Dreiecke ABC findet allgemein zwischen irgend einer Seite und den beiden andern Seiten, nebst dem von diesen eingeschlossenen Winkel, folgende Gleichung (Relation, Funktoin) Statt: *)

Der Cosinus einer Seite ist immer, in Beziehung auf den Sinus totus = 1, gleich dem Product aus den Cosinus der beiden andern Seiten nebst dem Product aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, z. B.

$$\text{Cos. a} = \text{cos. b . cos. c} + \text{sin. b . sin. c . cos. A}$$

Beweis: Die Construction sey wie in §. 27. (Fig. 13. 14.), außerdem noch in der Ebene AM die Gerade EG # DF und DH # BM gezogen.

Es ist im rechtwinklichten Dreieck CDE

CE : ED = 1 : cos. CED (A), also ED = sin. b : cos. A.

im rechtwinklichten Dreieck CDF ist

CF : FD = 1 : cos. CFD (B), also FD = sin. a . cos. B.

Ferner ist ∠ MED = 1 R = ∠ MGE, also

∠ HED = ∠ GME (weil GME + MEG = 1 R, auch MEG + HED = 1 R.)

also ist ∠ HED = c (in Gradmaß)

auch ist ∠ DEH = ∠ EGM = 1 R.

---

*) Der Satz ist leicht in Worten auszudrücken, wird aber in Buchstabenformel, seiner Bedeutung nach, dem Gedächtniß leichter zu behalten.

folglich im rechtwinklichten Dreieck DHE

ED : HD = 1 : sin. c; also HD = ED . sin. c =
cos. A . sin. b . sin. c

wenn man statt ED den dafür gefundenen Werth substituirt.

Im rechtwinklichten Dreieck EMG ist

EM : MG = 1 : cos. EMG (c), also MG = EM . cos. c,

oder (weil EM = cos. b für den Halbmesser der Kugel = 1) = cos. b . cos. c

Nun ist MF = MG + GF = MG + HD, oder

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A

(nach gehöriger Substitution der für MG u. HD gefundenen Werthe.)

Auf eine ganz gleiche Weise, vermittelst einer ähnlichen Construction, läßt sich auch beweisen, daß

cos. b = cos. a . cos. c + sin. a . sin. c . Cos. B und
cos. c = cos. a . cos. b + sin. a . sin. b . Cos. C ist.

Dieser Satz gilt auch für ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck ABC (Fig. 13.). Der Winkel B sey = 90°, so fällt die Senkrechte von C auf die Ebene ABM zugleich in die Ebene BCM, man ziehe EG senkrecht auf BM.

Auch hier ist ∠ GEF = ∠ GME = c (in Graden).

Im rechtwinklichten Dreieck CEF ist

CE : EF = 1 : cos. A, also EF = sin. b . cos. A

Im rechtwinklichten Dreieck GEF ist

EF : FG = 1 : sin. GEF (c) also FG = EF . sin. c
= sin. b . sin. c . cos, A

Im rechtwinklichten Dreieck EGM ist

EM : GM = 1 : cos. c, also GM = EM. cos. c
= cos. b . cos. c.

Nun ist FM = GM + FG und FM = cos. a, also

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A.

Bayerische Staatsbibliothek München

Anm.: Ein Modell nach der im §. 28 beschriebenen Art wird die deutliche Einsicht dieses ganzen Satzes außerordentlich erleichtern.

§. 30.

Lehrsatz.

In einem sphärischen Dreieck ABC findet allgemein zwischen einem Winkel und den beiden andern Winkeln, nebst der zwischen diesen beiden Winkeln liegenden Seite folgende Gleichung (Relation, Funktion) Statt:

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Product aus den Sinus der beiden andern Winkel und dem Cosinus der dazwischen liegenden Seite, weniger dem Product aus den Cosinus der beiden andern Winkel.

z. B. $\cos. A = \sin. B . \sin. C . \cos. a - \cos. B . \cos. C.$

Beweis: Zu dem Dreieck ABC giebt es (nach §. 26.) ein Ergänzungsdreieck (triangle supplémentaire), dessen Winkel wir A′, B′, C′ und dessen gegenüberliegende Seiten a′, b′, c′ nennen wollen. Die Seiten des einen Dreiecks ergänzen (nach §. 26.) die gegenüberliegenden Winkel, deren Spitzen oder Eckpunkte die Pole jener Seiten sind, zu 180^0, und umgekehrt.

Setzt man also im Ergänzungsdreieck A′ B′ C′

$a' = 180^0 - A$, $b' = 180^0 - B$, $c' = 180^0 - C$ und

$A' = 180^0 - a$, $B' = 180^0 - b$, $C' = 180^0 - c$;

so ist, wenn cos. a′ positiv genommen wird, cos. A negativ, weil A der Nebenwinkel von a′ ist; als absolute Größe betrachtet sind aber beide gleich; es ist nehmlich $+ \cos. a' = - \cos. A$; eben so $+ \cos. b' = - \cos. B$ u. s. w.

Im Ergänzungsdreieck $A'B'C'$ ist (nach §. 29.)

$$\cos. a' = \cos. b' . \cos. c' + \sin. b' . \sin. c' . \cos. A',$$

also im Dreieck ABC,

$$-\cos. A = \cos. B . \cos. C - \sin. B . \sin. C . \cos. a, \text{ oder}$$

$$+\cos. A = \sin. B . \sin. C . \cos. a - \cos. B . \cos. C.$$

§. 31.

Lehrsatz.

In einem sphärischen Dreieck ABC finden zwischen den drei Seiten a, b, c und zwei an einer Seite a liegenden Winkeln B, C folgende Gleichungen (Relationen, Funktionen) Statt: *)

1) $\sin.a . \cos.c = \cos.a . \sin.c . \cos. B + \sin. b . \cos. C.$

2) $\sin.a . \cot.c = \cos. a . \cos. B + \sin. B . \cot. C.$

Beweis: Nach §. 29 ist

$$\cos. b = \cos. a . \cos. c + \sin. a . \sin. c . \cos. B \text{ und}$$

$$\cos. c = \cos. a . \cos. b + \sin. a . \sin. b . \cos. C$$

Substituirt man nun den Werth cos. b der obern Gleichung in die untere, so erhält man:

$$\cos. c = \cos.^2 a . \cos. c + \cos. a . \sin. a . \sin. c . \cos. B + \sin. a . \sin. b . \cos. C.$$

Setzt man statt $\cos.^2 a$ den gleichen Werth $1 - \sin.^2 a$, so wird

$$\cos. c = \cos. c - \cos. c . \sin.^2 . a + \cos. a . \sin. a . \sin. c . \cos. B + \sin. a . \sin. b . \cos. C,$$

also $\sin.^2 a . \cos. c = \sin. a . \cos. a . \sin. c . \cos. B + \sin. a . \sin. b . \cos. C,$

---

*) Der Wortausdruck für diesen Satz ist schwülstig, der Buchstabenausdruck hingegen leicht zu behalten, weshalb ich hier bloß die Formel gebe.

folglich wird, wenn man die Glieder der Gleichung durch sin. a dividirt:

1) $\sin. a . \cos. c = \cos. a . \sin. c . \cos. B + \sin. b . \cos. C.$

Nach §. 27 ist: $\sin. b = \frac{\sin. B . \sin. c}{\sin. C}$.

also $\sin. a . \cos. c$

$= \cos. a . \sin. c . \cos. B + \frac{\sin. B . \sin. c . \cos. C}{\sin. C}$ (α.)

Dividirt man durch sin. c, und setzt man $\frac{\cos. c}{\sin. c}$

$= \cot. c$, so erhält man:

2) $\sin. a . \cot. c = \cos. a . \cos. B + \sin. B . \cot. C.$

Aus der Gleichung (α.) folgt auch diese:

$\sin. c . \sin. B . \cot. C = \sin. a . \cos. c - \cos. B . \sin. c . \cos. a$

u. s. w.

§. 32.

Die in den vier vorhergehenden Lehrsätzen aufgestellten Gleichungen reichen zur Auflösung oder Berechnung aller sphärischen Dreiecke aus. Die ersten zwei Sätze können als Fundamentalsätze betrachtet werden, aus denen die zwei andern, so wie alle übrigen sonst noch gebräuchlichen Formeln durch goniometrische Gleichungen, ohne Beihülfe geometrischer Construction, hergeleitet werden.

Zur Berechnung rechtwinklichter sphärischer Dreiecke geben einige Schriftsteller, z. B. Vega in seinem Mathem. Lehrb. noch folgenden Satz an, den man jedoch entbehren kann:

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreiecke verhält sich der Sinus totus zum Sinus einer Cathete, wie

die Tangente des an dieser Cathete anliegenden Winkels zur Tangente der gegenüberliegenden Cathete.

Der Beweis läßt sich also führen:

Es sey das Dreieck ABC (Fig. 13.) bei B rechtwinklicht u. s. w.

so ist MF : CF = sin. tot. : tang. a
ferner EF : CF = sin. tot. : tang. A

---

also MF : EF = tang. A : tang. a

Im rechtwinklichten Dreieck MEF ist:

MF : EF = sin. tot. : sin. c

---

folglich sin. tot. : sin. c = tang. A : tang. a

Jede der in den vier Hauptsätzen aufgestellten Gleichungen giebt durch dreimahlige Versetzung der Buchstaben, welche die Seiten und Winkel bezeichnen, drei Gleichungen. Diese Versetzungen sind bei einiger Aufmerksamkeit auf die, nur für einen Fall gezeigten, Relationen nicht schwer zu finden. Z B. nach dem ersten Satz (§. 27.) ist:

sin. a : sin. b = sin. A : sin. B, also
sin. a . sin. B = sin. b . sin. A, also
durch Versetzung der Buchstaben (Seiten u. Winkel) auch
sin. a . sin. C = sin. c . sin. A und
sin. b . sin. C = sin. c . sin. B.

Nach dem zweiten Satz (§. 29.) ist:

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c. cos. A,

durch Versetzung:

cos. b = cos. a . cos. c + sin. a . sin. c . cos. B
cos. c = cos. a . cos. b + sin. a . sin. b . cos. C.

Eben so verhält es sich mit den Versetzungen des 3ten und 4ten Satzes, welche dem Nachdenken der Leser überlassen bleiben.

Die Schlüsse oder Folgen, die sich übrigens für

einen besondern Fall einer Aufgabe aus den obigen Gleichungen ergeben, kann jeder Anfänger finden, z. B. aus der Gleichung:

$$\cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A$$

folgt: $\cos. A = \dfrac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c}$, nach welcher Formel man aus drei Seiten eines sphärischen Dreiecks einen Winkel A berechnen kann, den die Seiten b, c einschließen u. s. w

§. 33.

Abgeleitete, zu logarithmischer Bearbeitung brauchbare Formeln.

Die Formeln der vier obigen Hauptsätze gestatten, die erste ausgenommen, keine durchgängig logarithmische Behandlung. Man hat sich daher bemüht, aus denselben andere abzuleiten, welche diese Bequemlichkeit und Abkürzung bei wirklichen Zahlenberechnungen gestatten. Die vorzüglichsten und brauchbarsten dieser abgeleiteten Formeln wollen wir hier mit Beweis kennen lernen, und dem Gedächtniß, so weit es sich thun läßt, wohl einprägen.

1.

Es ist, wenn A, B, C die drei Winkel, a, b, c die denselben gegenüberliegenden drei Seiten (Bogen) eines sphärischen Dreiecks genannt werden:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-c+a)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(b-c-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(a-b-c)}\right\}}$$

Beweis: Nach dem zweiten Lehrsatz (§. 29.) ist:

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. b . cos. c}}{\text{sin. b . sin. c}}$$; daher, wie leicht zu zeigen ist,

$$1 + \text{cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}}{\text{sin. b . sin. c}}$$

$$1 - \text{cos. A} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{sin. b . sin. c}}$$, folglich

$$\frac{1 - \text{cos. A}}{1 + \text{cos. A}} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}}$$, oder (nach den Formeln 23. 24. im §. 8.)

$$\frac{2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2} \text{A}}{2 \text{ cos.}^2 \frac{1}{2} \text{A}} = \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} \text{A} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}}$$

oder durch gehörige Reduction nach der Formel 32. in §. 8.

$$\text{Tang.}^2 \tfrac{1}{2} \text{A} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin. \frac{1}{2}(a - b + c)}{2 \sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \sin. \frac{1}{2}(b + c - a)}$$

$$= \frac{\sin. \frac{1}{2}(b - c + a) \cdot \sin. \frac{1}{2}(b - c - a)}{\sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \sin. \frac{1}{2}(a - b - c)}$$

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2} \text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\sin. \frac{1}{2}(b - c + a) \cdot \sin. \frac{1}{2}(b - c - a)}{\sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \sin. \frac{1}{2}(a - b - c)}\right\}}$$

2.

$$\text{Tg.} \tfrac{1}{2} \text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\cos. \frac{1}{2}(B + C + A) \cdot \cos. \frac{1}{2}(B + C - A)}{\cos. \frac{1}{2}(B - C + A) \cdot \cos. \frac{1}{2}(B - C - A)}\right\}}$$

$$\text{oder} = \sqrt{\left\{\frac{-\cos. \frac{1}{2}(B + C + A) \cdot \cos. \frac{1}{2}(B + C - A)}{\cos. \frac{1}{2}(A + B - C) \cdot \cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}\right\}}$$

weil immer cos. (a — b) = cos. (b — a), auch im Zeichen, sind. Denn zu einem Winkel, er sey positiv oder negativ, gehört derselbe Cosinus.

Beweis: Nach dem dritten Hauptsatz im §. 30. ist:

$$\cos.a = \frac{\cos.B \,.\, \cos.C + \cos.A}{\sin.B \,.\, \sin.C}, \text{ also ist}$$

$$1 + \cos.a = \frac{\cos.A + \cos.(B - C)}{\sin.B \,.\, \sin.C}$$

$$1 - \cos.a = - \frac{\cos.(B + C) + \cos.A}{\sin.B \,.\, \sin.C}, \text{ also}$$

$$\frac{1 - \cos.a}{1 + \cos.a} \text{ oder } \operatorname{tang.}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{-[\cos.(B+C)+\cos.A]}{\cos.(B-C)+\cos.A}$$

oder nach einer Reduction, wie in 2) vorher:

$$\operatorname{Tg.} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left\{\frac{= \cos.\tfrac{1}{2}(B+C+A) \,.\, \cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C+A) \,.\, \cos.\tfrac{1}{2}(B-C-A)}\right\}}$$

3.

$$\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b \,.\, \sin.c}\right\}}$$

Beweis: Es ist, wie in 1)

$$1 - \cos.A = \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\sin.b \,.\, \sin.c} \text{ oder}$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{-2\sin.\tfrac{1}{2}(b-c+a) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(b-c-a)}{\sin.b \,.\, \sin.c}$$

also nach einer leichten Reduction:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b \,.\, \sin.c}\right\}}$$

4.

$$\operatorname{Cos.} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.b \,.\, \sin.c}\right\}}$$

wird eben so bewiesen, wenn man, wie vor-

$$\text{Her } 1 + \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. (b + c)}{\sin. b \,.\, \sin. c}$$

gehörig entwickelt und reducirt. Bei einiger Uebung und Aufmerksamkeit bringt man es in dergleichen goniometrischen Reductionen sehr bald zur Fertigkeit.

5.

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos. \tfrac{1}{2}(A+B+C) \,.\, \cos. \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right\}}$$

wird gefunden, wenn man $1 - \cos. a =$

$$1 - \frac{\cos. (B + C) + \cos. A}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$ in 2) auf gleiche Weise, wie vorher, reducirt.

6.

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\frac{\cos. \tfrac{1}{2}(A+B-C) \,.\, \cos. \tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right\}}$$

wird gefunden, wenn man $(1 + \cos. a)$ oder

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos. A + \cos. (B - C)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$ in 2) gehörig reducirt.

7.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \,.\, \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(B - A)}{\sin. \tfrac{1}{2}(B + A)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} (b + a) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \,.\, \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(B - A)}{\cos. \tfrac{1}{2}(B + A)}$$

Beweis: Nach dem Satz im §. 29. ist:

$$\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c = \sin.b \,.\, \sin.c \,.\, \cos.A$$
$$\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c = \sin.a \,.\, \sin.c \,.\, \cos.B.$$

also $\dfrac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \dfrac{\sin.b \,.\, \cos.A}{\sin.a \,.\, \cos.B} = \dfrac{\sin.B \,.\, \cos A}{\sin.A \,.\, \cos B}$;

daher $1 + \dfrac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = 1 + \dfrac{\sin.B \,.\, \cos.A}{\sin.A \,.\, \cos.B}$,

oder

$$\alpha) \quad \frac{(\cos.a + \cos.b) \,.\, (1 - \cos.c)}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \frac{\sin.(A + B)}{\sin.A \,.\, \cos.B}$$

Hingegen ist

$$\frac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} - 1 = \frac{\sin.B \,.\, \cos.A}{\sin.A \,.\, \cos.B} - 1,$$

oder

$$\beta) \quad \frac{(\cos.a - \cos.b) \,.\, (1 + \cos.c)}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \frac{\sin.(B - A)}{\sin.A \,.\, \cos.B}.$$

Wenn man nun die Gleichung β) durch die andre α) dividirt, und [nach den Formeln 23) 24) in §. 8.] $\dfrac{1 + \cos.c}{1 - \cos.c} = \dfrac{\cos.^2 \frac{1}{2} c}{\sin.^2 \frac{1}{2} c} = \cot.^2 \frac{1}{2} c$ setzt, so folgt:

$$\frac{\cos.a - \cos.b}{\cos.a + \cos.b} \,.\, \cot.^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin.(B - A)}{\sin.(B + A)},$$ oder

[nach den Formeln 34) und 21) im §. 8.]

$$\gamma) \quad \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(b - a) \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2}(b + a) \,.\, \cot.^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B - A) \,.\, \cos.\frac{1}{2}(B - A)}{\sin.\frac{1}{2}(B + A) \,.\, \cos.\frac{1}{2}(B + A)}$$

Nun ist ferner $\frac{\sin. b}{\sin. a} + 1 = \frac{\sin. B}{\sin. A} + 1$, oder

$$\frac{\sin. b + \sin. a}{\sin. a} = \frac{\sin. B + \sin. A}{\sin. A}, \text{ eben so}$$

$$\frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. a} = \frac{\sin. B - \sin. A}{\sin. A}, \text{ also}$$

$$\frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. b + \sin. a} = \frac{\sin. B - \sin. A}{\sin. B + \sin. A}, \text{ oder nach}$$

den Formeln 29) 30) 33) im §. 8. reducirt:

δ) $\text{Tang.} \frac{1}{2}(b - a) . \cot. \frac{1}{2}(b + a) =$

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}(B - A) . \cos. \frac{1}{2}(B + A)}{\sin. \frac{1}{2}(B + A) . \cos. \frac{1}{2}(B - A)}$$

Nun multiplicire man die Gleichungen γ) und δ) mit einander, so ist, weil allgemein $\text{tang} \psi . \cot. \psi = 1$, welcher Winkel auch ψ sey:

$$\text{tang.}^2 \frac{1}{2}(b - a) . \cot.^2 \frac{1}{2} c = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(B - A)}{\sin.^2 \frac{1}{2}(B + A)}, \text{ also}$$

durch Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\text{tang.} \frac{1}{2}(b - a) . \cot. \frac{1}{2} c = \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - A)}{\sin. \frac{1}{2}(B + A)}$$

Dividirt man durch diese letzte Gleichung die Gleichung γ), so wird:

$$\text{tang.} \frac{1}{2}(b + a) . \cot. \frac{1}{2} c = \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - A)}{\cos. \frac{1}{2}(B + A)}$$

Setzt man $\cot. \frac{1}{2} c = \frac{1}{\text{tang.} \frac{1}{2} c}$, so erhält man

erstlich: $\text{tang.} \frac{1}{2}(b - a) = \text{tang.} \frac{1}{2} c . \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - A)}{\sin. \frac{1}{2}(B + A)}$

zweitens: $\text{tg.} \frac{1}{2}(b + a) = \text{tang.} \frac{1}{2} c . \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - A)}{\cos. \frac{1}{2}(B + A)}$

8.

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-A) = \cot.\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(b-a)}{\sin.\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) = \cot.\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}$$

Beweis: Nach dem dritten Hauptsatz im §. 30 ist:

$$\cos.A + \cos.B.\cos.C = \sin.B.\sin.C.\cos.a \text{ und}$$

$$\cos.B + \cos.A.\cos.C = \sin.A.\sin.C.\cos.b.$$

Folglich:

$$\frac{\cos.A+\cos.B.\cos.C}{\cos.B+\cos.A.\cos.C} = \frac{\sin.B.\cos.a}{\sin.A.\cos.b} = \frac{\sin.b.\cos.a}{\sin.a.\cos.b}$$

Zu dieser Gleichung addire man 1, und subtrahire auch 1, so erhält man durch eine ganz ähnliche Verwandlung, wie in 7).

$$\frac{(\cos.A+\cos.B).(1+\cos.C)}{\cos.B+\cos.A.\cos.C} = \frac{\sin.(b+a)}{\sin.a.\cos.b} \text{ und}$$

$$\frac{(\cos.A-\cos.B).(1-\cos.C)}{\cos.B+\cos.A.\cos.C} = \frac{\sin.(b-a)}{\sin.a.\cos.b}, \text{ also}$$

durch eine ähnliche Reduction, wie in 7).

$$\frac{\cos.A-\cos.B}{\cos.A+\cos.B}.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.(b-a)}{\sin.(b+a)} \text{ oder}$$

α) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B+A).\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B-A).\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.\frac{1}{2}(b-a).\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\sin.\frac{1}{2}(b+a).\cos.\frac{1}{2}(b+a)}$$

Nun ist auch, wie in 7) δ)

β) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-A).\cot.\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(b-a).\cos.\frac{1}{2}(b+a)}{\sin.\frac{1}{2}(b+a).\cos.\frac{1}{2}(b-a)}$$

Multiplicirt man die Gleichungen α) β) mit einander, so erhält man:

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}(B-A) \cdot \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(b-a)}{\sin.^2 \frac{1}{2}(b+a)}, \text{ folglich}$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(B-A) \cdot \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin. \frac{1}{2}(b-a)}{\sin. \frac{1}{2}(b+a)}$$

Dividirt man durch diese Gleichung die Gleichung α) so wird:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(B+A) \cdot \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}$$

Weil aber $\text{tang.} \frac{1}{2} C = \frac{1}{\cot. \frac{1}{2} C}$, so ist:

erstlich: $\text{tang.} \frac{1}{2}(B-A) = \cot. \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}(b-a)}{\sin. \frac{1}{2}(b+a)}$

zweitens: $\text{tang.} \frac{1}{2}(B+A) = \cot. \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}$

§. 34.

Zweite Methode, die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zu finden.

(Fig. 15.)

Wir haben gesehen, daß die zwei Sätze im §. 27 und §. 29, durch eine geometrische Construction in der Kugelpyramide bewiesen, als Fundamentalsätze zu betrachten sind, aus welchen die übrigen durch goniometrische Gleichungen hergeleitet werden. Es wird den denkenden Lesern nicht unangenehm seyn, zu sehen, wie sich derselbe Zweck auf einem noch andern Wege und zwar, wie es mir scheint, durch eine noch einfachere Construction an der Kugelpyramide erreichen läßt, der-

gestalt, daß hier nur ein Satz, nehmlich der zweite Lehrsatz im §. 29, der Fundamentalsatz wird, gleichsam die Quelle, aus welcher alle übrigen fließen.

Es sey wieder A B C (Fig. 15) ein sphärisches Dreieck mit der gebrauchten Bezeichnung seiner Winkel und Seiten, A B C M eine Kugelpyramide; ferner sey A D eine Tangente an den Bogen A B in der Ebene des Kreissectors A B M, der Kugelhalbmesser M B sey verlängert, bis er die Tangente A D in D schneidet; auf solche Weise ist M A D ein ebenes rechtwinklichtes Dreieck, der Kugelhalbmesser A M ist der Sinus totus, A D ist die Tangente, M D die Secante des Bogens (oder Winkels) A B = c; eben so sey A G eine Tangente und M G eine Secante des Bogens (oder Winkels) A C = b für denselben Sin. tot. A M in dem ebenen rechtwinklichten Dreieck M A G.

Der Winkel D A G, welchen die beiden Tangenten A D, A G einschließen, ist dem Neigungswinkel der beiden Kreissectoren A B M und A C M oder dem sphärischen Winkel A in Gradmaß gleich, wie oben erinnert wurde; der Bogen A B = c ist das Maß des ebenen Winkels A M D u. s. w.

Man ziehe die Hülfslinie D G, so ist nach einem Satz der ebenen Trigonometrie im §. 19. 1ste Abtheil.

$$DG^2 = AD^2 + AG^2 - 2AD \,.\, AG \,.\, \cos. A \text{ oder}$$

$$DG^2 = \text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2\,\text{tang.}\, b \,.\, \text{tg.}\, c \,.\, \cos. A$$

Ferner ist aus gleichem Grunde im Dreieck M D G

$$DG^2 = MG^2 + MD^2 - 2MG \,.\, MD \,.\, \cos a, \text{ oder}$$

$$DG^2 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2\,\text{sec.}\, b \,,\, \text{sec.}\, c \,.\, \cos. a.$$

Hieraus folgt:

$$\text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2\,\text{tang.}\, b \,.\, \text{tang.}\, c \,.\, \cos. A =$$

$$\text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2\,\text{sec.}\, b \,.\, \text{sec.}\, c \,.\, \cos. a$$

Subtrahirt man von der untern Reihe der Gleichung die obere, so wird, weil immer für Sin. tot. = 1, $\sec.^2 b - \tang.^2 b = 1$ ist, und $\tang. b =$

$$\frac{\sin. b}{\cos. b}, \quad \sec. b = \frac{1}{\cos. b},$$

$$1 + 1 + \frac{2 \sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A - \frac{2 \,.\, \cos. a}{\cos. b \,.\, \cos. c} = 0,$$

$$\text{demnach } 2 + \frac{2 \sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A = \frac{2 \cos. a}{\cos. b \,.\, \cos. c},$$

$$\text{also } 1 + \frac{\sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A = \frac{\cos. a}{\cos. b \,.\, \cos. c}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\Cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A,$$

derselbe Satz, welcher oben im §. 29 auf eine offenbar weitläufigere Art erwiesen wurde. Der hier gegebene geometrisch-analytische Beweis findet sich nicht in unsern Lehrbüchern, wahrscheinlich weil er den Verfassern nicht bekannt war.

Auf ganz gleiche Weise kann man auch beweisen, daß

$\Cos. b = \cos. a \,.\, \cos. c + \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B$ und

$\Cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C$ ist

Wir wollen nun sehen, wie sich aus diesem Fundamentalsatz der im §. 27 besonders bewiesene Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie deduciren läßt. Nach unserm Fundamentalsatz ist:

$$\Cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c}, \quad \text{daher}$$

$1 - \cos.^2 A$ oder $\sin.^2 A =$

$$1 - \frac{\cos^2 a + \cos.^2 b \,.\, \cos.^2 c - 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c},$$

oder: $\text{Sin}^2 A =$

$$\frac{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c - \cos.^2 a - \cos.^2 b \,.\, \cos^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c}$$

Nun ist $\sin.^2 . b \,;\, \sin.^2 c = (1 - \cos.^2 b) . (1 - \cos.^2 c) =$

$$1 - \cos.^2 b - \cos.^2 c + \cos.^2 b \,.\, \cos.^2 c.$$

Folglich auch $\sin^2 A =$

$$\frac{\sin.^2 a \,(1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \cdot \cos. c)}{\sin.^2 a \,.\, \sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c}$$

Daher $\sin. A = \sin. a \times$

$$\frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c)}}{\sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \sin. c}$$

Der zusammengesetzte Factor, womit im zweiten Theile dieser Gleichung Sin. a multiplicirt wird, heiße F, so bleibt dieser Factor ungeändert derselbe, wenn man auf gleiche Weise, wie hier der Werth von Sin. A entwickelt worden, auch die Werthe von Sin. B und Sin. C aus dem Fundamentalsatze ableitet.

Es ist nehmlich:

1) $\text{Sin. } A = \sin. a \,.\, F$
2) $\text{Sin. } B = \sin. b \,.\, F$
3) $\text{Sin. } C = \sin. c \,.\, F$

Hieraus folgt der Schluß, daß

$\text{Sin. } A : \sin. B = \sin. a : \sin. b$, eben so
$\text{Sin. } A : \sin. C = \sin. a : \sin. c.$
$\text{Sin. } B : \sin. C = \sin. b : \sin. c.$

Dies ist derselbe Satz, der oben im §. 27 als der erste Lehrsatz auf eine andre, in allen Lehrbüchern angezeigte, Art bewiesen wurde:

Setzt man in der Fundamentalgleichung:

$$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C$$

den Winkel $C = 90^0$, so wird $\cos. C = 0$, also $\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b$, nehmlich in einem recht-

winklichten sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Product aus den Cosinus der beiden Catheten.

Wie sich aus der eben dargestellten Fundamentalgleichung alle übrigen goniometrischen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie weiter ableiten lassen, dies ausführlich zu zeigen, würde hier zu weitläufig und nach den bereits vorgetragenen Sätzen auch ganz überflüßig seyn.

§. 35.

Tabelle der Formeln oder Gleichungen zur Berechnung sphärischer Dreiecke.

Ein jedes sphärische Dreieck werde der Gleichförmigkeit halber mit den Buchstaben A B C, seine Winkel mit A, B, C, die denselben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet; der Halbmesser der Kugel oder Sin. tot. = 1 gesetzt, so sind folgende Formeln zu wirklichen Berechnungen die brauchbarsten. Jede Formel gestattet drei Abwechselungen.

A) Grundformeln.

1) Sin. a . sin. B = sin. b . sin. A
mit drei Abwechselungen *)

2) Cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A

3) Cos. A = sin. B . sin. C . cos. a — cos. B . cos. C

*) Der noch weniger geübte Leser wird wohl thun, jede dieser Abwechselungen aufzusetzen.

4) $\text{Sin. a . cos. c} = \text{cos. a . sin. c . cos. B} + \text{sin. b . cos. C}$

5) $\text{Sin. a . cot. c} = \text{cos. a . cos. B} + \text{sin. B . cot. C}$

B) Abgeleitete Formeln, zu logarithmischer Berechnung.

6) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b}-\text{c}+\text{a}) \cdot \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b}-\text{c}-\text{a})}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c}) \cdot \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}-\text{b}-\text{c})}\right\}}$$

7) $$\text{Tg.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C}-\text{A})}\right\}}$$

8) $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{b}-\text{c}) \cdot \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$$

9) $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c}) \cdot \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b}+\text{c}-\text{a})}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$$

10) $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{sin. B . sin. C}}\right\}}$$

11) $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C}) \cdot \text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{C}-\text{B})}{\text{sin. B . sin. C}}\right\}}$$

12) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{b}-\text{a}) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\text{c} \cdot \frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A})}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A})}$$

13) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{b}+\text{a}) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\text{c} \cdot \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A})}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A})}$$

14) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A}) = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\text{C} \cdot \frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b}-\text{a})}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b}+\text{a})}$$

15) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A}) = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\text{C} \cdot \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{b}-\text{a})}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\text{b}+\text{a})}$$

C) Formeln für rechtwinklichte sphärische Dreiecke.

Ist in einem sphärischen Dreieck ABC ein Winkel $C = 90^0$, so ist Sin. $90^0 = 1$, Cosinus und Cotangente von $90^0 = 0$; daher wird:

16) Sin. b = sin. c . sin. B (nach Formel 1.)
17) Cos. c = cos. a . cos. b (n. F. 2.)
18) Cos. c = cot. A . cot. B (n. F. 3.) *)
19) Cot. c = cot. a . cos. B) (n. F. 5, weil cot. C = o)
20) Cos. A = sin. B . cos. a (n. F. 3.)
21) Cot. A = cot. a . sin. b (n. F. 5.) **)

Trigonometrische Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 36.

Rechtwinklichte Dreiecke.

Wenn ein sphärisches Dreieck ABC einen rechten Winkel C hat, so brauchen außerdem nur noch zwei

---

*) Nehmlich nach dieser Formel ist:
Cos. C = sin. A . sin. B . cos. c — cos. A . cos. B.
also $\cos. c = \frac{\cos. A . \cos. B}{\sin. A . \sin. B} =$ cot. A . cot. B (weil Cos. C = o.)

**) Nach Formel 5 ist:
Sin. b . cot. a = cos. b . cos. C + sin. C . cot. A;
Eben so ist:
Cot. B = cot. b . sin. a.

Stücke desselben gegeben zu seyn, um daraus die übrigen unbekannten Stücke zu berechnen. Einige Aufmerksamkeit wird dem Leser zeigen, daß die im vorigen §. 35. für rechtwinklichte sphärische Dreiecke aufgestellten goniometrischen Formeln zu dieser Berechnung ausreichen. Wären z. B. die beiden Catheten a, b des Dreiecks gegeben, so würde sich die Hypothenuse c nach der Formel 17) berechnen lassen, nehmlich:

$$\cos. c = \cos. a . \cos. b.$$

Logarithmisch behandelt:

$$\log. \cos. c = \log. \cos. a + \log. \cos. b - 10 \text{ u. s. w.}$$

Alle jene Formeln oder Gleichungen für rechtwinklichte Dreiecke lassen, wie man sieht, logarithmische Bearbeitung zu, und die erste (Formel 17) ausgenommen, sind sie, wegen der darin enthaltenen goniometrischen Funktionen, von solcher Beschaffenheit, daß die gesuchte Seite oder der gesuchte Winkel ohne Zweideutigkeit gefunden wird. Ist z. B. die Hypothenuse c aus den gegebenen Catheten a, b zu berechnen, so ist

$$\cos. c = \cos. a . \cos. b$$

Sind nun a und b kleiner, als 90^0, so sind cos. a und cos, b positiv, also auch das Product cos. a . cos. b, folglich auch cos. c positiv; daraus folgt, daß in diesem Falle c ein Bogen oder Winkel kleiner als 90^0 seyn muß. Sind a und b stumpfe Winkel, so sind ihre Cosinus beide negativ, also ihr Product: cos. a . cos. b, folglich auch cos. c positiv; also c kleiner als 90^0. Sind a und b ungleichartig *),

---

*) Gleichartig heißen zwei Winkel oder Bogen, wenn beide entweder kleiner als 90^0 oder größer als 90^0 sind; ungleichartig, wenn der eine kleiner, der andre aber größer als 90^0 ist.

nehmlich der eine Winkel kleiner, der andre größer als 90^0, oder nach dem gewöhnlichen Ausdruck der eine spitz, der andre stumpf, so ist offenbar das Product cos. a . cos. b, also auch cos. c negativ; folglich gehört dann zu c ein stumpfer Winkel, oder Bogen größer als 90^0.

Solche Betrachtungen lassen sich mit allen Formeln von 17 bis 21 des §. 35. anstellen, und können füglich jedem nachdenkenden Leser überlassen bleiben. Eben aus solchen Betrachtungen werden sich die Sätze ungemein leicht ergeben, welche mehrere mathematische Schriftsteller über die Gleichartigkeit und Ungleichartigkeit der Seiten und Winkel eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks sehr ausführlich auseinandersetzen. Es wird genügen, hier diese Sätze nur kurz anzudeuten, weil die Beweise dafür aus den Formeln selbst hervorgehen:

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreieck sind die Winkel an der Hypothenuse mit den gegenüberliegenden Catheten gleichartig, und umgekehrt; nach Formel 20).

In einem solchen Dreieck sind die Catheten gleichartig, wenn die Hypothenuse kleiner als 90^0, ungleichartig aber, wenn die Hypothenuse größer als 90 ist; und umgekehrt; nach Formel 17).

In einem solchen Dreieck sind die Winkel an der Hypothenuse gleichartig, wenn diese kleiner als 90^0; hingegen ungleichartig, wenn die Hypothenuse größer als 90^0 ist; nach Formel 18); auch muß einer jener Winkel $= 90^0$ seyn, wenn die Hypothenuse $c = 90^0$ ist; denn in diesem Fall wird nach Formel 18).

cos. c = cot. A . cot. B in diese verwandelt:

o = cot. A . cot. B, also muß cot. A oder cot. B = o, folglich A oder B = 90^0 seyn.

Bloß der Fall ist zweideutig, wo die gesuchte Größe durch einen Sinus gegeben wird, zu welchem immer zwei Winkel, ein spitzer und sein stumpfer Nebenwinkel, gehören; dieser Fall tritt immer ein, wenn eine Cathete und der ihr gegenüberliegende Winkel gegeben sind, oder aus der Hypothenuse und einem anliegenden Winkel eine diesem gegenüberliegende Cathete ꝛc. berechnet werden soll, überhaupt, wenn in der Aufgabe 4 gegenüberliegende Stücke vorkommen, und man zur Auflösung die Formel 16) anwenden muß. Diese Zweideutigkeit wird indessen durch die bekannten Umstände eines practischen Falles, so wie bisweilen durch den Umstand gehoben, daß die größern Seiten den größern Winkeln ꝛc. gegenüberliegen.

Sphärische Dreiecke überhaupt.
(Schiefwinklichte.)

§. 37.
Aufgabe. *)

Von einem sphärischen Dreieck A B C sind die drei Seiten a, b, c gegeben; daraus soll ein Winkel, z. B. A berechnet werden.

Auflösung: Nach der Formel 2) im §. 35 ist;

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. b} \,.\, \text{cos. c}}{\text{sin. b} \,.\, \text{sin. c}}$$

*) Der Leser wird da, wo die Sätze nicht mit besondern Figuren belegt sind, die Gefälligkeit haben, sich eine solche zu zeichnen. Die Winkel des sphärischen Dreiecks werden immer mit A, B, C, die denselben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet.

Zur logarithmischen Bearbeitung geeignet, also brauchbarer sind die Formeln 6) 8) 9).

Die Formel:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\,b\,.\,\sin.\,c}\right\}}$$

ist zu empfehlen, wenn der gesuchte Winkel sehr spitz.

Die Formel:

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.\,b\,.\,\sin.\,c}\right\}}$$

hingegen, wenn der gesuchte Winkel sehr stumpf ist.

Der Winkel $\frac{1}{2}A$ kann auch nach der ersten Formel $\text{Sin.}\frac{1}{2}A =$ u. s. w. nicht zweideutig gefunden werden; nehmlich $\frac{1}{2}A$ muß kleiner als 90^0 seyn, da A kleiner als 180^0 ist, in dem Sinne nehmlich, wie die sphärischen Dreiecke in der Trigonometrie betrachtet werden, und auch in der Praxis nicht anders vorkommen, nehmlich dergestalt, daß jeder Winkel und auch jede Seite eines solchen Dreiecks kleiner als 180^0 sind.

Beispiel: Es sind gegeben: $a = 69^0\,50'$, $b = 109^0\,39'\,10''$, $c = 46^0\,42'$. Es wird gesucht der Winkel A.

$$\text{Hier ist Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\,3^0\,26'\,25''\,.\,\sin.\,66^0\,23'\,35''}{\sin.\,109^0\,39'\,10''\,.\,\sin.\,46^0\,42'}\right\}}$$

Logarithmisch:

+ log. sin. 3° 26′ 25″	=	8,7782098
+ log. sin. 66° 23′ 35″	=	9,9620444
+ 2 log. sin. tot.	=	20,.....
		+ 38,7402542
— log. sin. 109° 39′ 10″	=	9,9739347
— log. sin. 46° 42′	=	9,8619958
		— 19,8359305
Rest	+	18,9043237 div. durch 2
Giebt log. sin. $\frac{1}{2}$A	=	9,4521618

Also ∠ A = 32° 54′ 28″ sehr nahe.

§. 38.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreieck sind die drei Winkel A, B, C gegeben; man soll daraus eine seiner Seiten, z. B. a, berechnen.

Auflösung: Nach Formel 3) im §. 35 ist:

$$\text{Cos. a} = \frac{\cos. A + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$

Zur logarithmischen Bearbeitung dienen die Formeln 7) 10) 11).

Nach Formel 11 ist:

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right\}}$$

Beispiel: Es sind gegeben: A = 132° 19′, B = 47° 32′, C = 35° 11′. Gesucht der Winkel oder Bogen a.

Hier ist: $\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\cos. 72^\circ 20' \,.\, \cos. 59^\circ 59'}{\sin. 47^\circ 32 \,.\, \sin. 35^\circ 11'}\right\}}$

$$
\begin{array}{rll}
+ \log. \cos. 72^0\,20' & = & 9{,}4821283 \\
+ \log. \cos. 59^0\,59' & = & 9{,}6991887 \\
+ 2 \log. \sin. \text{tot.} & = & 20{,}\ldots\ldots \\
\hline
 & & + 39{,}1813170 \\
- \log. \sin. 47^0\,32' & = & 9{,}8678623 \\
- \log. \sin. 35^0\,11' & = & 9{,}7605692 \\
\hline
 & & - 19{,}6284315 \\
\hline
\text{Rest} & & + 19{,}5528855 \text{ div. d. 2 giebt:} \\
\hline
\log. \cos. \tfrac{1}{2} a & = & 9{,}7764427 \\
\text{also } \tfrac{1}{2} a & = & 53^0\,17'\,55'' \text{ sehr nahe.} \\
\text{daher } a & = & 106^0\,35'\,50''.
\end{array}
$$

§. 39.

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten, a, b und der von denselben eingeschlossene sphärische Winkel C gegeben; daraus soll die dritte Seite c berechnet werden.

Auflösung: Nach einer Abwechselung der Formel 2) im §. 35 ist:

$$\text{Cos. c} = \cos. a . \cos. b + \sin. a . \sin. b . \cos. C.$$

Um aber die Berechnung des Bogens c ganz logarithmisch bewirken zu können, bedient man sich eines sogenannten Hülfswinkels. Man denke sich nehmlich den Bogen eines größten Kreises AR senkrecht auf die Seite a, so entsteht ein bei R rechtwinklichtes Dreieck ARC, in welchem b die Hypothenuse und der Bogen $CR = \varphi$ eine Cathete ist.

Nun ist nach Formel 19) im §. 35:

$$\text{Cot. b} = \text{cot.}\varphi \,.\, \text{cos. C} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\text{tang. b}} = \frac{1}{\text{tang.}\varphi} \,.\, \text{cos. C, also}$$

$$\text{tang.}\varphi = \text{tang. b} \,.\, \text{cos. C}$$

Nach dieser Gleichung suche man logarithmisch den Bogen oder Winkel φ.

Hierauf substituire man den Werth: $\text{Cos. C} = \frac{\text{tang.}\varphi}{\text{tang. b}}$

in die obige Formel für Cos. c, so wird:

$$\text{Cos. c} = \text{cos. a . cos. b} + \text{sin. a. sin. b} \,.\, \frac{\text{tang.}\varphi}{\text{tang. b}}$$

$$= \text{cos. a . cos. b} + \text{sin. a . cos. b} \,.\, \frac{\text{sin.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}$$

$$= \text{cos. b} \left\{ \frac{\text{cos. a . cos.}\varphi + \text{sin. a . sin.}\varphi}{\text{cos.}\varphi} \right\} \text{ oder}$$

$$\text{Cos. c} = \frac{\text{cos. b} \,.\, \text{cos.}(\text{a} - \varphi)}{\text{cos.}\varphi}. \text{ So findet man c}$$

logarithmisch.

Beispiel: Es sind gegeben: $\text{a} = 41^\circ 9' 46''$, $\text{b} = 41^\circ 47' 24''$, $\text{C} = 14^\circ 2' 30''$.

Gesucht der Bogen c.

Berechnung nach der zweiten Methode:

$$\text{tang.}\varphi = \frac{\text{tang. } 41^\circ 47' 24'' \,.\, \text{cos. } 14^\circ 2' 30''}{\text{sin. tot.}}$$

+ log. tang.	$41^\circ 47' 24''$	= 9,95123 51
+ log. cos.	$14^\circ 2' 30''$	= 9,9868252
— log. sin. tot.		= 10,.....
log. tang. φ		= 9,9380603

Also der Hülfswinkel $\varphi = 40^\circ 55' 40{,}7''$. (41″)

$$\text{Cos. c} = \frac{\cos. 41^0\,47'\,24'' \;.\; \cos. 0^0\,14'\,5''}{\cos. 40^0\,55'\,41''}$$

$$+ \log.\cos. 41^0\,47'\,24'' = 9{,}8725014$$
$$+ \log.\cos. 0^0\,14'\,5'' = 9{,}9999964$$
$$+ \quad 19{,}8724978$$
$$- \log.\cos. 40^0\,55'\,41'' = 9{,}8782532$$
$$\log.\cos. c = 9{,}9942446$$

also $c = 9^0\,18'\,26''$ nahe.

Zur Uebung und Vergleichung der Arbeit kann man auch die Berechnung von c nach der ersten Formel vornehmen.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Seiten c, a und der von denselben eingeschlossene Winkel B gegeben; daraus sollen die beiden andern Winkel C, A oder nur einer derselben berechnet werden.

Auflösung: Nach den Formeln 14) 15) im §. 35 ist:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C - A) = \cot.\tfrac{1}{2}B \;.\; \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c - a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(c + a)}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C + A) = \cot.\tfrac{1}{2}B \;.\; \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(c - a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(c + a)}$$

So findet man $\tfrac{1}{2}(C - A) = D$
$\tfrac{1}{2}(C + A) = S$

also $C = S + D$
$A = S - D$

Wir haben hier angenommen, daß die gegebene Seite c größer als die andre a ist; ist a > c gegeben; so ist der obige Ansatz also zu ändern:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)=\cot.\tfrac{1}{2}B\cdot\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+c)}\text{ u. s. w.}$$

Zweite Methode: Wird bei dieser Aufgabe nur ein Winkel, wie es gewöhnlich der Fall ist, verlangt, z. B. C, so verfährt man kürzer also:

Man denke sich den Bogen AR senkrecht auf a, so entsteht ein bei R rechtwinklichtes sphärisches Dreieck ABR, dessen eine Cathete der Bogen BR = φ sey.

Nun ist nach der Formel 5) im §. 35.

$$\cot.c.\sin.a=\cos.a.\cos.B+\sin.B.\cot.C,\text{ daher}$$

$$\cot.C=\frac{\cot.c\ .\ \sin.a-\cos.a\ .\ \cos.B}{\sin.B}$$

Nach der Formel 19) im §. 35 ist:

$$\cot.c=\cot.\varphi\ .\ \cos.B$$

Daraus bestimme man logarithmisch den Bogen BR = φ. Dann wird

$$\cot.C=\frac{\cot.\varphi.\cos.B.\sin.a}{\sin.B}-\frac{\cos.a.\cos.B}{\sin.B},\text{ oder}$$

$$\cot.C=\cot.B\ (\cot.\varphi.\sin.a-\cos.a)$$

$$=\cot.B\left\{\frac{\cot.\varphi.\sin.\varphi.\sin.a-\sin.\varphi.\cos.a}{\sin.\varphi}\right\}$$

$$=\cot.B\left\{\frac{\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}.\sin.\varphi.\sin.a-\sin.\varphi.\cos.a}{\sin.\varphi}\right\}$$

$$=\cot.B.\left\{\frac{\cos.\varphi.\sin.a-\sin.\varphi.\cos.a}{\sin.\varphi}\right\},\text{ also}$$

$$\cot.C=\frac{\cot.B\ .\ \sin.(a-\varphi)}{\sin.\varphi}.\text{ Darnach läßt sich}$$

nun der Winkel C logarithmisch bestimmen.

Sollte der andre Winkel A bestimmt werden, so geschähe dies auf eine ganz ähnliche Weise, indem ein Bogen von C auf c senkrecht gezogen würde u. s. w.

Beispiel: Es sind gegeben $a = 73^0\,58'\,54''$, $c = 38^0\,45'$, $B = 46^0\,33'\,41''$.

Gesucht $A = 115^0\,9'\,7''$, $C = 35^0\,46'\,15''$.

Der Leser wird wohl thun, die Berechnung wirklich nach den bemerkten Methoden vorzunehmen, und die Richtigkeit der hier gegebenen Resultate zu prüfen. Der vollständige Gang einer solchen logarithmisch trigonometrischen Rechnung ist in den vorangegangenen Aufgaben schon einigemahle nachgewiesen worden.

§. 41:

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Winkel A, C und die zwischen denselben liegende (eingeschlossene) Seite b gegeben; daraus sollen die beiden andern Seiten c, a berechnet werden.

Auflösung: Nach den Formeln 12) 13 im §. 35 ist:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(C-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(C+A)},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c+a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(C-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(C+A)}$$

So berechnet man logarithmisch:

$\frac{1}{2}(c-a) = D$, $\frac{1}{2}(c+a) = S$, also $c = S + D$. $a = S - D$.

Wäre in der Aufgabe A größer als C, so würde man ansetzen:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-c) = \text{tang.}\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A-C)}{\sin.\tfrac{1}{2}(A+C)} \text{ u. s. w.}$$

Zweite Methode vermittelst eines Hülfswinkels:

Soll, wie es in der Praxis gewöhnlich verlangt wird, nur eine der unbekannten Seiten, z. B. c, berechnet werden, so verfährt man kürzer also:

Man denke sich von A auf die gegenüberliegende unbekannte Seite a einen Bogen AR senkrecht; der sphärische Winkel CAR sey $= \varphi$.

Nach der Formel 18) im §. 35 ist:

$\cos. b = \cot. C . \cot. \varphi$; also $\cot. \varphi = \cos. b . \text{tang}. C$;

so läßt sich der Hülfswinkel φ berechnen.

Es ist $\cot. C = \cos. b . \text{tang}. \varphi$.

Ferner ist nach der Formel 5) im §. 35.

$\cot. c . \sin. b = \cos. b . \cos. A + \sin. A . \cot. C$, also

$$\cot. c = \frac{\cos. b . \cos. A + \sin. A . \cos. b . \text{tang}. \varphi}{\sin. b}$$

$$= \cot. b \, (\cos. A + \sin. A . \text{tang}. \varphi)$$

$$= \cot. b . \left\{ \frac{\cos. A . \cos. \varphi + \sin. A . \sin. \varphi}{\cos. \varphi} \right\}, \text{ also}$$

$$\cot. c = \cot. b . \frac{\cos. (A - \varphi)}{\cos. \varphi}$$

So läßt sich logarithmisch die Seite c bestimmen.

§. 42.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Seiten a, b und ein Winkel B, der einer dieser Seiten gegenüberliegt, gegeben; daraus soll der andre Winkel A, welcher der zweiten Seite gegenüberliegt, berechnet werden.

Auflösung: Da vier gegenüberliegende Stücke in dieser Aufgabe erscheinen, so kann die Auflösung nicht anders, als durch eine Proportion des Hauptsatzes im §. 27 geschehen; nehmlich es ist:

$$\sin. b : \sin. a = \sin. B : \sin. A, \text{ also}$$

$$\sin. A = \frac{\sin a \,.\, \sin. B}{\sin. b}$$

$$\log. \sin. A = \log. \sin. a + \log. \sin. B - \log. \sin. b \text{ u.s.w.}$$

Da hier der Winkel A durch seinen Sinus gegeben wird, so ist er zweideutig, d.h. er kann, wenn er nicht $= 90^0$ gefunden wird, sowohl ein spitzer, als auch dessen stumpfer Nebenwinkel seyn. Diese Zweideutigkeit wird durch folgende in der Aufgabe bestimmte Umstände beschränkt, oder zum Theil gehoben:

Der gesuchte Winkel A ist ein spitzer oder kleiner als 90^0,

1) wenn der Winkel $B < 90^0$, und $b > a$ ist, da in einem sphärischen Dreieck den kleinern Seiten die kleinern Winkel und umgekehrt gegenüberliegen;

2) wenn $B > 90^0$, $a < 90^0$, $b < (180^0 - a)$ ist;

Der gesuchte Winkel A ist ein stumpfer oder größer als 90^0,

1) wenn $B > 90^0$ und $b < a$ ist,

2) wenn $B < 90^0$, $a > 90^0$, und $b > (180^0 - a)$ ist.

In andern, als diesen Fällen (bekannten Umständen) bleibt die Auflösung unbestimmt, nehmlich A kann spitz oder stumpf seyn, oder es sind zwei verschiedene sphärische Dreiecke auf der Kugeloberfläche möglich, welche die gegebenen Stücke a, b, B gemein haben. Am deutlichsten kann ein Anfänger sich dies durch ein Kugelmodell machen. Es wird übrigens in der Praxis wohl nur äußerst selten ein Fall vorkommen, wo man

nach den bekannten Umständen nicht schon im Voraus die Beschaffenheit des gesuchten Winkels A wissen sollte.

Der Beweis für die gegebenen Merkmahle der bestimmten Fälle läßt sich also führen.

Nach der Formel 15) im §. 35 ist in jedem sphärischen Dreieck ABC

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\cot.\tfrac{1}{2}C \,.\, \cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

In dieser Formel müssen die Factoren $\cot.\frac{1}{2}C$ und $\cos.\frac{1}{2}(b-a)$ offenbar positiv seyn, da die Winkel $\frac{1}{2}C$ und $\frac{1}{2}(b-a)$ kleiner als 90^0 sind, folglich müssen die Größen $\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)$ und $\cos.\frac{1}{2}(b+a)$ in der Gleichung einerlei Zeichen haben, d. h. entweder beide positiv oder beide negativ seyn; daher müssen auch $\frac{1}{2}(b+a)$ und $\frac{1}{2}(B+A)$ gleichartig, d. h. die halbe Summe der beiden Seiten und die halbe Summe der gegenüberliegenden Winkel entweder beide kleiner als 90^0 oder größer als 90^0 seyn; man kann demnach auch sagen, daß wenn die ganze Summe der zwei gegebenen Seiten $a+b$ größer oder kleiner als 180^0 ist, auch die ganze Summe der gegenüberliegenden Winkel $A+B$ größer oder kleiner als 180^0 seyn muß; wäre $a+b = 180^0$, so wäre auch $A+B = 180^0$.

Wir wollen diese Regel auf einen der oben bestimmten Fälle anwenden:

Der gesuchte Winkel A, sagte ich, ist spitz oder kleiner als 90^0,

wenn B größer als 90^0, z. B. 95^0,
= a kleiner als 90^0, z. B. 75^0, und
= b kleiner als $180^0 - a$ ist.

In diesem Falle ist, wie man sieht, $a+b$ kleiner als 180^0, also auch $B+A$ kleiner als 180^0; da aber B größer als 90^0, z. B. 95^0, so muß offenbar A

kleiner als 90^0 oder spitz seyn. Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen bestimmten Fälle leicht erklären.

Der Winkel A ist zweideutig, also die Auflösung unbestimmt, wenn die erwähnten Bedingungen der Aufgabe nicht Statt finden, z. B.

A ist zweideutig, wenn $B < 90^0$, $a < 90^0$, $b < 90^0$

u. s. w.

§. 43.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreiecke ABC sind zwei Winkel A, B und eine Seite b, welche einem der Winkel gegenüberliegt, gegeben; daraus soll die andre Seite a, welche dem zweiten Winkel gegenüberliegt, berechnet werden.

Auflösung: Auch in dieser Aufgabe kommen vier gegenüberliegende Stücke vor; folglich kann die Auflösung nur durch eine Proportion des Hauptsatzes im §. 27 bewirkt werden; es ist nehmlich:

$\sin. B : \sin. A = \sin. b : \sin. a$, also

$$\sin. a = \frac{\sin. A \,.\, \sin. b}{\sin. B}$$

$$\log. \sin. a = \log. \sin. A + \log. \sin. b - \log. \sin. B.$$

Da a durch seinen Sinus gegeben wird, so tritt dieselbe Zweideutigkeit ein, wie in der Aufgabe des §. 42. Diese Zweideutigkeit wird aber auch hier durch folgende Bedingungen der Aufgabe beschränkt, oder zum Theil gehoben:

Die gesuchte Seite (Bogen) a ist kleiner als 90^0,

1) wenn $b < 90^0$ und $B > A$ ist;
2) wenn $A < 90^0$, $b > 90^0$ und $B < (180^0 - A)$ ist;

Die gesuchte Seite a ist größer als 90^0,

1) wenn $b > 90^0$ und $B < A$,

2) wenn $A > 90^0$, $b < 90^0$ u. $B > (180^0 - A)$ ist.

Unter andern Bedingungen der Aufgabe, als diese sind, ist die Auflösung unbestimmt, d. h. a kann ein Bogen seyn, der größer oder kleiner als 90^0 ist. Die Erinnerung, welche im §. 42, diese Zweideutigkeit betreffend, gemacht wurde, gilt auch hier. Der Beweis für die Merkmahle der bestimmten Fälle wird hier auf ähnliche Art und mittelst derselben Formel geführt, welche Betrachtung der Leser nicht versäumen wird.

Ist die Seite a gefunden, so läßt sich der dritte Winkel des Dreiecks C nach den Formeln 14) oder 15) im §. 35 berechnen, nehmlich:

nach 14) ist: $\text{tang.}\frac{1}{2}C = \text{cot.}\frac{1}{2}(B-A) \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(b-a)}{\sin.\frac{1}{2}(b+a)}$

nach 15) ist: $\text{tang.}\frac{1}{2}C = \text{cot.}\frac{1}{2}(B+A) \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}$

Anmerkung: Die von §. 37 bis §. 43 vorgetragenen Aufgaben reichen zur Berechnung der Seiten und Winkel eines jeden sphärischen Dreiecks aus drei gegebenen Stücken desselben, völlig aus. Einige andere Aufgaben, welche die senkrechten Bogen, von einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite gezogen, so wie die dadurch entstehenden Abschnitte (Segmente) auf dieser Seite, betreffen, will ich hier als weniger bedeutend übergehen; wo aber weiterhin eine Aufgabe der Art in der practischen Erdvermessung vorkommen sollte, so wird dieselbe mittelst der bereits abgehandelten Sätze ohne Schwierigkeit zu entwickeln und berechnen seyn.

Flächenraum eines sphärischen Dreiecks.

§. 44.

Lehrsatz und Aufgabe. [Fig. 17 und 18.] *)

Der Flächenraum eines sphärischen Dreiecks A B C wird bestimmt, indem man den Halbmesser der Kugel, von deren Oberfläche das Dreieck ein Theil ist, multiplicirt mit dem Längenmaß (gegen den Halbmesser verglichen) eines größten Kreisbogens, der in Graden so viel beträgt, als der Ueberschuß der drei sphärischen Winkel des Dreiecks über zwei rechte Winkel. Heißt nehmlich R der Halbmesser der Kugel, F der Flächenraum des Dreiecks A B C; so ist:

$$F = (A + B + C - 180^0) \cdot R.$$

Beweis: Zwei größte Kreise A D B, A E B (Fig. 17) auf der Oberfläche einer Kugel schneiden einander zweimahl in A und B, in einer Bogenentfernung von 180^0; die Durchschnittspunkte A, B sind die Pole dieser Bogen, A B die zugehörige Axe, gleich dem Durchmesser der Kugel. Das Stück der Kugeloberfläche, welches von den zwei einander schneidenden Halbkreisen A D B, A E B eingeschlossen wird, kann (nach meiner Meinung) schicklicherweise ein Sector der Kugeloberfläche genannt werden; andere Schriftsteller nennen es Streifen, die Franzosen fuseau (Spindel).

---

*) Die Figuren, welche in den Figuren 17 und 18 auf einer Ebene angedeutet sind, wird der Leser sich auf eine Kugel verzeichnen, und sich dadurch diesen ganzen Satz fast so leicht machen, wie irgend einen andern aus der Elementargeometrie. Die Unverständlichkeit der Sache kann auch hier nur vom Mangel an Anschauung entstehen.

Es ist klar, daß der sphärische Winkel a, nehmlich der Neigungswinkel der zwei größten einander schneidenden Kreisebenen, wozu die halben Kreisbogen ADB, AEB gehören, die Größe des Sectors der Kugeloberfläche ADBEA bestimmt.

Hat nun ein zweiter Sector der Kugeloberfläche AEBGA einen gleichen spärischen Winkel, nehmlich $b = a$, so werden beide Sectoren auf völlig gleiche Weise bestimmt, und sind demnach congruent und gleich. Die Summe der sphärischen Winkel in A, um die Achse der Kugel AB herum, vom Anfangspunkt D bis zu demselben Endpunkt D, beträgt offenbar vier Rechte $= 360^{o}$. So vielmahl nun der sphärische Winkel a in 360° (im größten Umkreis) enthalten ist, so vielmahl muß auch der dazu gehörige Kugelsector in der Oberfläche der ganzen Kugel enthalten seyn. Der Beweis dafür ist durchaus elementarisch, wie bei Vergleichung von Kreissectoren gegen die ganze Kreisfläche. Ist das Verhältniß $a : 360$ rational, so hat der Beweis gar keine Schwierigkeit; ist aber dieses Verhältniß $a : 360$ irrational, so muß er mittelst der sogenannten Exhaustionsmethode geführt werden, wie dies auch beim Kreis geschieht.

Nun sey ABC ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel, deren Halbmesser $= R$, nach irgend einem Längenmaß, gegeben ist; der Flächenraum dieses Dreiecks heiße F. Um den oben ausgesprochenen Satz zu beweisen, verlängere man die eine Seite BC, so daß BCEDB ein ganzer größter Kreis wird, und also die Kreisfläche (in Fig. 18) die halbe Kugeloberfläche von oben gesehen vorstellt.

Man verlängere ferner die Bogen AC, AB, so daß BAE, ABG, CAD, ACG gleich 180° werden; die Bogen AB, AC schneiden einander in einer Entfernung von 180° zum zweitenmahl in G auf der

entgegengesetzten Halbkugel, auch schneiden sie den Halbkreis BCEDB in D und E; dadurch entstehen zwei sphärische Dreiecke BCG und ADE, welche gleiche Seiten haben, und also gleich sind; denn $AE = BG$, $AD = CG$, $BE = 180^0 = CD$, also auch $DE = BC$. Die Flächenräume dieser beiden Dreiecke wollen wir e nennen. Außerdem entstehen auf der obern Halbkugel noch zwei Dreiecke ACE und BAD, deren Flächenräume h, m heißen mögen. Der Kugelsector (Streifen) ACGBA ist gleich $\triangle ABC + \triangle BCG = \triangle ABC + \triangle AED = F + e$.

Benennen wir die ganze Kugeloberfläche K, so ist nach dem oben Gesagten:

$360^0 : A = K : ACGBA$, also die Fläche des Kugelsectors.

$$ACGBA = \frac{A \cdot K}{360}, \text{ oder}$$

1) $F + e = \frac{A \cdot K}{360}$, eben so ist

2) $F + h = \frac{B \cdot K}{360}$

3) $F + m = \frac{C \cdot K}{360}$

Folglich $3F + e + h + m = \frac{(A + B + C) \cdot K}{360^0}$, auch ist:

$F + e + h + m = \frac{K}{2}$ (halbe Kugeloberfläche)

also $2F = \frac{(A + B + C) K}{360^0} - \frac{K}{2}$

$$= \frac{(A + B + C - 180) \cdot K}{360}$$

Also $F = \frac{(A + B + C - 180) \cdot K}{2 \cdot 160}$

Nun ist die ganze Kugeloberfläche nach der Elementargeometrie $4R^2\pi = 2R \,.\, 2R\pi = 2R \,.\, 360^0$, wenn man 360^0 in Längenmaß des Halbmessers R ausdrückt, wie hier geschehen muß. Daraus folgt;

$$F = \frac{(A + B + C - 180) \times 2.360 \,.\, R}{2 \,.\, 360}$$

$$= (A + B + C - 180) \,.\, R.$$

Nehmlich der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ABC wird gefunden, indem man den Ueberschuß seiner Winkel über 180^0 in Längenmaß des Halbmessers verwandelt, und diese Zahl mit der Zahl des Halbmessers multiplicirt.

Ein in Graden gegebener Bogen φ wird aber in Längenmaß des Halbmessers R bekanntlich also bestimmt:

$$360^0 : 2R\pi = \varphi : \frac{R\pi}{180^0}$$

Daher ist der quadratische Flächeninhalt eines sphärisches Dreiecks nach dem Längenmaß des Kugelhalbmessers R dieser:

$$F = (A^0 + B^0 + C^0 - 180^0) \,.\, \frac{R^2 \,.\, \pi}{180^0}$$

Bei dieser Berechnung werden die Gradzahlen gebraucht; ist der Ueberschuß $(A + B + C - 180)$ in Minuten, Sekunden ꝛc. gegeben, so muß auch der Nenner 180^0 in Minuten, Sekunden ꝛc. verwandelt werden u. s. w.

Will man aber allgemein F nach der Formel:

$$F = (A + B + C - 180) \,.\, R$$

in Gradmaß ausdrücken, so muß man R ebenfalls in Gradmaß verwandeln.

Nach der Gleichung: $F = \frac{(A^0 + B^0 + C^0 - 180^0) \,.\, K}{2 \,.\, 360^0 \,(720^0)}$

kann man die Fläche des sphärischen Dreiecks mit der ganzen Kugeloberfläche vergleichen; die erstere verhält sich nehmlich zur letztern, wie der Ueberschuß der drei sphärischen Winkel über 180^0 zu 720^0.

Nennen wir diesen Ueberschuß D^0, so ist:

$$F : K = D^0 : 720^0.$$

So kann man aus der bereits gegebenen oder berechneten Kugeloberfläche leicht die Fläche eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel in Graden gegeben sind, herleiten.

§. 45.

Verwandlung der Gradbogen in Theile des Halbmessers und des Halbmessers in Gradbogen.

Diese Verwandlung wird in der Praxis der Erdmessung oft nothmendig. Sie hat keine Schwierigkeit, und soll daher hier nur kurz angedeutet werden.

Der Halbmesser eines Kreises sey $R = 1$, als Längenmaß; so ist bekanntlich die Peripherie dieses Kreises nach diesem Längenmaß $= 2R\pi$.

Es ist $\pi = 3{,}14159265 \ldots$, also

$\log. \pi = 0{,}49714987 \ldots$.

Der Log. π kommt bei Kreis- und Kugelberechnungen sehr oft vor; man thut daher wohl, denselben dem Gedächtniß einzuprägen, um sich in vorkommenden Fällen das Aufschlagen in Tafeln zu ersparen.

Soll eine Bogenlänge von φ Grad in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden, so geschieht solches durch folgende Proportion:

$$360^0 : 2R\pi = \varphi^0 : \frac{2R\pi \cdot}{360}$$

$$\text{Bogenlänge } \varphi = \frac{R\pi \cdot \varphi^0}{180}$$

$\log. \varphi = \log. R + \log. \pi + \log. \varphi^0 - \log. 180^0$ u. s. w.

Ist $R = 1$, so ist $\log. \varphi = \log. \pi + \log. \varphi - \log. 180^0$.

Z. B. wenn $\varphi = 3^0$,

so ist $\log. \varphi = \log. \pi + \log. 3^0 - \log. 180$

$= 0{,}7189986 - 2$, also φ,

nehmlich die Bogenlänge von $3^0 = 0{,}052359 88.....$ wenn der Halbmesser $R = 1$, ... gesetzt wird.

Es leuchtet ein, daß, wenn einmahl der Zahlenwerth von einer oder einigen Bogenlängen gefunden worden, daraus auch die Werthe der übrigen Bogenlängen durch eine noch einfachere arithmetische Operation bestimmt werden können. So muß die Bogenlänge von 6^0 die doppelte Bogenlänge von 3^0 seyn; ist die Bogenlänge von 180^0 zuerst bestimmt, so giebt ihre Hälfte die Bogenlänge von 90^0, ihr Drittel die Bogenlänge von 60^0 u. s. w. Eben so werden die Werthe der Bogen, die auf kleinere Gradtheile, Minuten, Sekunden ꝛc. angegeben sind, bestimmt. Auf diesen ganz einfachen Kalkul gründet sich die Construction eigner Tafeln der Bogenlängen für $R = 1$. Eine solche Tafel hat Lambert in seiner Schrift: Supplementa Tab. Logar. et Trigon. Berlin 1770, gegeben; jetzt trifft man dergleichen in allen guten Logarithmensammlungen, z. B. in den sehr schätzbaren von Vega und andern mehr.

Hier würde eine Tafel der Art zu viel Platz einnehmen.

Mit Hülfe solcher Tafeln läßt sich auch ein in Längenmaß des Halbmessers gegebener Bogen umgekehrt auf Gradmaß reduciren. Der Halbmesser selbst läßt sich in Bogenlänge verwandeln; nehmlich es läßt

sich die Gradzahl finden, deren Bogenlänge dem Halbmesser gleich ist, durch diese Proportion:

$$2R\pi : 360 \text{ oder } R\pi : 180 = R : \frac{180^0}{\pi} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = \text{Sek.}$$

Nun ist $+ \log. 180 \cdot 60 \cdot 60 = 5{,}81157500$

$- \log. \pi = 0{,}49714999$

$\log. R'' = 5{,}31442501$

Also $R'' = 206264{,}8$ Sekunde.

$= 57^0\,17'\,44''\,48'''$ äußerst nahe.

Nehmlich die Länge des Halbmessers ist der Länge eines Bogens von $57^0\,17'\,44''\,48'''$ gleich zu setzen.

Diese Zahl muß man demnach statt R brauchen, wenn der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks allgemein in quadratischem Gradmaß, nach der Formel $F = (A + B + C - 180)\,R$, ausgedrückt werden soll, wie es in der Erdvermessung bisweilen geschieht.

§. 46.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreieck ABC auf einer Kugel, deren Halbmesser R irgend ein bekanntes Längenmaß ist, sind die drei Winkel A, B, C oder die drei Seiten a, b, c gegeben; daraus soll sein Flächeninhalt berechnet werden.

Auflösung:

1) Sind die Winkel A, B, C gegeben, so ist nach §. 44 die Fläche des Dreiecks $F = \frac{D \cdot R^2\pi}{180}$ für

$D = (A + B + C - 180^0)$

Enthält D Minuten oder auch Sekunden, so müssen D und 180 bei dieser Berechnung gleichnamig ge-

macht, nehmlich beide in Minuten oder auch Sekunden verwandelt werden.

Beispiel: Es sey $A = 54^0\,17'$, $B = 63^0\,19'$, $C = 67^0\,28'$.

$R = 7$ Fuß.

Hier ist $(A + B + C - 180)$ oder $D = 5^0\,4'$, also

$$F = \frac{304' \cdot 49 \cdot \pi}{180 \cdot 60'}$$

$$\begin{aligned} + \log. 304 &= 2{,}4828736 \\ + \log. 49 &= 1{,}6901961 \\ + \log. \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline + 4{,}6702196 \\ - + (\log. 180 + \log. 60) &= 4{,}0334238 \\ \hline \log. F &= 0{,}6367958 \end{aligned}$$

Also der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks $F = 4{,}333307$ □F. $= 4$ □F, 33 □Z. 31 □L. sehr nahe.

Es kann sich finden, daß ein Winkel des Dreiecks oder auch zwei oder auch alle drei rechte Winkel sind.

Ist ein Winkel $A = 90^0$, so wird

$$F = (B + C - 90)\frac{R^2\pi}{180}.$$

Sind zwei $A, B = 90^0$, so wird $F = \frac{CR^2\pi}{180}$.

Sind alle drei $A, B, C = 90^0$, so wird $F = \frac{R^2\pi}{2}$ gleich dem achten Theil der ganzen Kugeloberfläche, welche $4R^2\pi$ ist.

2) Wenn die drei Seiten des Dreiecks a, b, c gegeben sind, so berechne man daraus die Winkel A, B, C (nach §. 37) u. s. w. Es läßt sich eine Formel geben, den Ueberschuß D unmittelbar aus den Seiten abzuleiten; ihre Entwickelung aber ist sehr weitläufig, und

die Berechnung darnach nicht viel kürzer; daher ich sie hier übergehe.

Anm.: Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks läßt sich überhaupt immer bestimmen, wenn drei Stücke desselben in der Art gegeben sind, daß sich darnach das Dreieck, also auch seine drei Winkel bestimmt berechnen lassen, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt worden.

§. 47.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Vieleck (Polygon), dessen Seiten Bogen größter Kreise auf einer Kugeloberfläche sind, sind die Winkel und der Halbmesser der Kugel R gegeben; daraus soll der Flächeninhalt desselben berechnet werden.

Auflösung: Es läßt sich ein jedes Vieleck der Art durch Diagonalbogen größter Kreise in so viel sphärische Dreiecke zerlegen, als die Anzahl n der Seiten weniger zwei beträgt. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist der Summe der gegebenen Vieleckswinkel gleich; der Ueberschuß aller Polygonwinkel über $(n-2)\,180^0$ muß offenbar derselbe seyn, als die Ueberschüsse eines jeden Dreiecks über 180^0 zusammengenommen. Heißt die Summe der Polygonwinkel S, so wird der gesammte Ueberschuß $D = S - (n-2)\,180^0$; also (nach §. 46.)

$$F = (S - (n-2)\,180)\,\frac{R^2\pi}{180}$$

Wenn z. B. von einem sphärischen Fünfeck ABCDE die Winkel gegeben sind, so ist seine Fläche den Flächen der drei Dreiecke ABC, ACD, ADE, in die es sich zerlegen läßt, zusammengenommen gleich, nehmlich:

$$F = (A + B + C + D + E - 3.180).\frac{R^2\pi}{180}$$

Jeder Vieleckswinkel giebt mit seinem sphärischen Nebenwinkel zusammen 180°; heißt nun die Summe aller dieser Nebenwinkel M, so ist offenbar $S + M = n.180$, also $S = n.180^0 - M$; demnach wird obige Formel:

$$F = (n.180^0 - M - n.180 + 360).\frac{R^2\pi}{180}$$

$$= (360 - M)\frac{R^2\pi}{180}$$

Reduction sphärischer Dreiecke auf die zu ihnen gehörigen geradlinigten Sehnendreiecke.

§. 48.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Die Seiten (Bogen) eines sphärischen Dreiecks ABC sind a, b, c: die correspondirenden Seiten des Sehnendreiecks, welches entsteht, wenn man die Endpunkte der Bogen durch gerade Linien verbindet, sind α, β, γ; es wird verlangt, aus den gegebenen Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks die Seiten des Sehnendreiecks zu berechnen, oder auch umgekehrt.

Auflösung:

1) Aus a, b, c sollen α, β, γ berechnet werden.

Der Halbmesser der Kugel, welcher auch der Halbmesser der Bogen a, b, c ist, sey R, irgend ein Längenmaß. Die Sehne α ist für diesen Halbmesser der

doppelte Sinus des halben Bogens a (in Graden); nehmlich nach der ebenen Trigonometrie ist:

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin.\frac{1}{2}a \,.\, R}{\sin.\,tot.}, \text{ (zu logar. Bearb.)}$$

$$\alpha = \frac{2\sin.\frac{1}{2}a \,.\, R}{\sin.\,tot.}$$

$$\log.\alpha = \log.2 + \log.\sin.\tfrac{1}{2}a - 10 + \log.R, \text{ u. s. w.}$$

Eben so ist $\beta = \frac{2\sin.\frac{1}{2}b \,.\, R}{\sin.\,tot.}$

$$\gamma = \frac{2\sin.\frac{1}{2}c \,.\, R}{\sin.\,tot.}$$

So lassen sich die geraden Längen von α, β, γ nach dem Maß des Kugelhalbmessers finden, und gegen die Bogenlängen a, b, c nach demselben Maß, vergleichen.

2) Aus α, β, γ sollen umgekehrt a, b, c berechnet werden.

Es ist, wie in 1)

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \frac{\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin.\,tot.}{R} \text{ (zu logar. Bearb.)}$$

So findet man den Winkel oder Bogen $\frac{1}{2}a$, also a in Graden; dieses Gradmaß läßt sich dann in Längenmaß des Halbmessers R verwandeln, nach dem Satz:

$$360 : 2R\pi \text{ oder } 180^0 : R\pi = a^0 : \frac{aR\pi}{180}$$

Eben so wird $\sin.\frac{1}{2}b = \frac{\frac{1}{2}\beta \,.\, \sin.\,tot.}{R}$ u. s. w. berechnet.

Sind die Bogen a, b, c, in Graden d. h. in Verhältniß zum größten Kreis der Kugel sehr klein, welches auch Statt findet, wenn die Sehnen eine beträcht-

liche Länge haben, der Halbmesser der Kugel aber gegen diese sehr groß ist, so wird der Unterschied zwischen den Seiten des sphärischen und geradlinigten Sehnendreiecks immer sehr gering gefunden. Ein Beispiel der Art wird weiterhin folgen.

§. 49.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind A, B, C, seine Seiten a, b, c, die Winkel des dazu gehörigen Sehnendreiecks $\mathfrak{A}$ (bei A), $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, seine Seiten α, β, γ; es wird verlangt, aus den Seiten des Sehnendreiecks α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel A, B, C des sphärischen Dreiecks, oder umgekehrt, aus den Seiten des sphärischen Dreiecks a, b, c die gegenüberliegenden Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des Sehnendreiecks zu berechnen.

Auflösung: Der Kürze wegen wollen wir hier den Halbmesser der Kugel $R = 1$, und sin. tot. $= 1$ setzen.

1) Es sind die Seiten des Sehnendreiecks α, β, γ gegeben; daraus sollen die sphärischen Winkel A, B, C berechnet werden. Man sieht sogleich, daß zuerst aus den Seiten α, β, γ die Seiten (Bogen) a, b, c des sphärischen Dreiecks, und aus diesen dann die Winkel desselben A, B, C bestimmt werden müssen. Die Bestimmung eines Winkels, z. B. A unmittelbar aus den drei gegebenen Stücken läßt sich in einer etwas zusammengesetzten Formel also darstellen.

Es ist $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b . \cos. c}{\sin. b . \sin. c}$ (n. F. 2. im §. 35.)

Ferner ist $\sin. \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \alpha$ (für R und sin. tot. $= 1$.)

also $1 - \cos. a = 2 \frac{1}{4} \alpha^2$ (n. Formel 24. im §. 8.)

folglich $\cos. a = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$;

Eben so $\cos. b = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$

$\cos. c = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2$.

Daraus folgt auch $\sin. b = \sqrt{1-(1-\frac{1}{2}\beta^2)^2}$

$= \beta\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2}$

Eben so $\sin. c = \gamma\sqrt{1-\frac{1}{4}\gamma^2}$

Diese Werthe substituire man in die obige Gleichung für $\cos. A$, so ist:

$$\cos. A = \frac{1-\frac{1}{2}\alpha^2-[(1-\frac{1}{2}\beta^2)\cdot(1-\frac{1}{2}\gamma^2)]}{\beta\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2}\cdot\gamma\sqrt{1-\frac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma\cdot\frac{1}{4}\sqrt{4-\beta^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}$$, oder mit 4 Zähler und Nenner multiplicirt.

$$\cos. A = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha^2-\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma\cdot\sqrt{4-\beta^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}.$$

Eben so würde man erhalten:

$$\cos. B = \frac{2\alpha^2+2\gamma^2-2\beta^2-\alpha^2\gamma^2}{\alpha\gamma\cdot\sqrt{4-\alpha^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}$$ u. s. w.

Die Berechnung der Winkel A, B, C nach einer solchen Formel, ist bei wirklichen Zahlenexempeln schwierig und weitläufig; ich glaube, man wird hier besser thun, wenn man nach der vorigen Aufgabe §. 48 aus den Seiten α, β, γ erst die Bogen a, b, c, und sodann aus diesen den einen oder andern sphärischen Winkel (denn gewöhnlich werden sie nicht alle zugleich verlangt) bestimmt.

2) Die Seiten (Bogen) des sphärischen Dreiecks a, b, c sind gegeben; daraus sollen die Winkel A, B, C des Sehnendreiecks bestimmt werden.

Es ist $\cos. \mathfrak{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (Siehe §. 20.)

Nun ist $\beta = 2\sin.\frac{1}{2}b$, $\gamma = 2\sin.\frac{1}{2}c$, $\alpha = 2\sin.\frac{1}{2}a$, also

$$\cos.\mathfrak{A} = \frac{2\,.\,(\sin.^2\frac{1}{2}b + \sin.^2\frac{1}{2}c - \sin.^2\frac{1}{2}a)}{4\sin.\frac{1}{2}b\,.\,\sin.\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin.^2\frac{1}{2}b + \sin.^2\frac{1}{2}c - \sin.^2\frac{1}{2}a}{2\sin.\frac{1}{2}b\,.\,\sin.\frac{1}{2}c}$$ u. s. w.

Diese Formel hat die Unbequemlichkeit, daß sie nicht ganz logarithmische Bearbeitung gestattet; auch hier gilt die Bemerkung, daß man zuerst aus den Bogen a, b, c (nach §. 48.) die Seiten α, β, γ und dann hieraus (nach §. 20.) die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und zwar logarithmisch, berechnen kann.

§. 50.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Zwei Seiten b, c eines sphärischen Dreiecks und der von denselben eingeschlossene Winkel A sind gegeben; daraus soll der Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$, der dem sphärischen A correspondirt, berechnet, oder es soll der sphärische Winkel A auf den Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$ reducirt werden.

Auflösung:

Es ist $\cos.a = \cos.b\,.\cos.c + \sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A$
(n. Formel 2. §. 35.),

oder $1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}a =$
$\sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A + (1-2\sin.^2\frac{1}{2}b)\,.\,(1-2\sin.^2\frac{1}{2}c)$,

also nach erfolgter Reduction:

$2\sin.^2\frac{1}{2}b + 2\sin.^2\frac{1}{2}c - 2\sin.^2\frac{1}{2}a =$
$\sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A + 4\sin.^2\frac{1}{2}c\,.\sin.^2\frac{1}{2}b.$

Im Sehnendreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos.\mathfrak{A}$ (n. §. 19), oder

da $\alpha = 2 \sin. \frac{1}{2} a$, $\beta = 2 \sin. \frac{1}{2} b$, $\gamma = 2 \sin. \frac{1}{2} c$,

$$4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a =$$
$$4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} c - 8 \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A},$$

also $2 \sin.^2 \frac{1}{2} b + 2 \sin.^2 \frac{1}{2} c - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a =$
$4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$

Statt des vordern Theils dieser Gleichung setze man den vorher dafür bestimmten Werth, so ist:

$$\sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin.^2 \tfrac{1}{2} c =$$
$$4 \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$$

Nun ist $\sin. b \,.\, \sin. c = 4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \frac{1}{2} c$
(nach Formel 21. §. 8.)

Also $4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \cos. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. A + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} b \,.\, \sin.^2 \frac{1}{2} c$
$= 4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$

Dividirt man Alles durch $4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c$, so erhält man:

$$\cos. \mathfrak{A} = \cos. \tfrac{1}{2} b \,.\, \cos. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. A + \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c.$$

Nach der Analogie dieser Formel lassen sich auch die andern Sehnenwinkel B, C aus zwei Seiten und dem eingeschloßnen Winkel des sphärischen Dreiecks bestimmen.

Sind die zwei Seiten des sphärischen Dreiecks, b, c gleich, so wird:

$$\cos. \mathfrak{A} = \cos.^2 \tfrac{1}{2} b \,.\, \cos. A + \sin.^2 \tfrac{1}{2} b.$$

oder weil allgemein $\cos. a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

$1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} \mathfrak{A} = \cos.^2 \frac{1}{2} b \,.\, (1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A) + 1 - \cos.^2 \frac{1}{2} b$,
$\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} = \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} A$, ein sehr bequemer Ausdruck, um $\frac{1}{2} \mathfrak{A}$, also auch $\mathfrak{A}$ zu finden.

§. 51.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Vom Sehnendreieck sind zwei Seiten β, γ und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben; dieser

Winkel $\mathfrak{A}$ soll auf den sphärischen Winkel A reducirt werden.

Auflösung. Im Sehnendreieck ist nach der schon öfter angeführten Formel:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \cos.\mathfrak{A}$$

Diesen Werth von α^2 setze man in die Gleichung für cos. A, welche in der Aufgabe §. 49 gefunden worden, so wird:

$$\cos.A = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta^2 - 2\gamma^2 + 4\beta\gamma \cdot \cos.\mathfrak{A} - \beta^2\gamma^2}{\beta\gamma \cdot \sqrt{4-\beta^2} \cdot \sqrt{4-\gamma^2}}$$

$$= \frac{4\cos.\mathfrak{A} - \beta\gamma}{\sqrt{4-\beta^2} \cdot \sqrt{4-\gamma^2}}$$

Man kann auch, nach einer leichten Reduction, setzen:

$$\cos.A = \frac{\cos.\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{[(1+\frac{1}{2}\beta) \cdot (1-\frac{1}{2}\beta) \cdot (1+\frac{1}{2}\gamma) \cdot (1-\frac{1}{2}\gamma)]}}$$

Sind die gegebenen Seiten des Sehnendreiecks β, γ gleich, in welchem Falle auch die Seiten des sphärischen Dreiecks b, c gleich sind, so wird der gefundene Ausdruck etwas abgekürzt, nehmlich es ist dann:

$$\cos.A = \frac{4\cos.\mathfrak{A} - \beta^2}{4-\beta^2}, \text{ also auch}$$

$$1 - \cos.A = 1 - \frac{(4\cos.\mathfrak{A} - \beta^2)}{4-\beta^2} = \frac{4(1-\cos.\mathfrak{A})}{4-\beta^2}$$

oder, weil überhaupt $1 - \cos.\varphi = 2\sin.^2\frac{1}{2}\varphi$.

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{4\sin.^2\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{4-\beta^2}, \text{ also}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{4-\beta^2}} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{(2+\beta).(2-\beta)}}$$

Man kann auch setzen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}\beta) \cdot (1-\frac{1}{2}\beta)}}$$

Aus dieser Formel erhellt, daß der Sehnenwinkel A des gleichschenklichten sphärischen Dreiecks ABC größer seyn muß, als der zugehörige Sehnenwinkel A.

Man muß bei jeder Berechnung nach den bisher gegebenen Formeln nicht vergessen, daß der Kugelhalbmesser sowohl, als die goniometrische Größe Sin. tot. = 1 angenommen worden sind. Es kann bei einiger Aufmerksamkeit keinem Leser schwer fallen, einzusehen, wie man sich zu verhalten habe, wenn der Halbmesser der Kugel R, auf welche sphärische Dreiecke bezogen werden, in einer bestimmten Zahl nach irgend einem Maß ausgedrückt wird, in welchem Falle dann die Längen der Seiten a, b, c und α, β, γ nach eben solchem Maß, in Theilen des Halbmessers angesetzt werden müssen. Wir werden weiterhin Gelegenheit finden, uns dies an wirklich geodätischen Beispielen zu erläutern.

Dritte Abtheilung.

Von den
vorzüglichsten und brauchbarsten Werkzeugen
zu
Erdmessungen und Aufnahmen.

Die Meßinstrumente lassen sich in zwei Klassen abtheilen:

In die eine gehören alle Werkzeuge und Vorrichtungen, vermittelst deren man Längen oder Distanzen nach irgend einem Maßstab so genau als möglich bestimmen kann; in die zweite gehören die Werkzeuge, vermittelst deren man die Winkel, welche von fixen Punkten auf der Erdoberfläche gebildet werden, entweder bloß geometrisch auf einen Plan von Papier oder desgl. construirt, oder auch nach dem allgemein bekannten Gradmaß von Kreisbogen in Zahlen, mißt.

Außer diesen sind besonders in der höhern Erdvermessung noch einige andere Hülfsmittel nöthig, z. B. genaue Zeitmesser, oder Uhren, die unter dem Namen Chronometer bekannt sind u. s. w.

Ich glaube meinen Lesern einen Dienst zu erweisen, wenn ich hier bloß von der Construction und dem Gebrauch der wichtigsten und brauchbarsten neuern Werkzeuge zu Längen- und Winkelmessungen spreche,

und daher alle die ältern unnützen Einrichtungen der Art, welche nur noch geschichtlichen Werth haben, ganz mit Stillschweigen übergehe.

§. 52.

Meßkette und Maßstäbe zur Distanzenmessung.

Bei Längen- und Basis-Bestimmungen, welche nicht die größte Genauigkeit verlangen, kann eine gut gearbeitete Meßkette, geschickt angewandt, ausreichen. Bei größern geodätischen Operationen hingegen, z. B. bei der geographischen Aufnahme einer weit ausgedehnten Erstrecke, eines ganzen Landes, kommt auf die genaueste Längenbestimmung einer Hauptbasis (Stand-Grund-Linie) ungemein viel an, wie wir weiterhin sehen werden; für eine solche Bestimmung ist daher ein genaueres Maßwerkzeug nöthig, als auch die vorzüglichste Meßkette ihrer Natur nach seyn kann. Dies sind Maßstäbe von Holz, von Metall oder einem andern festen Körper, der durch den Einfluß der Atmosphäre oder anderer äußerer Kräfte in seiner Dimension nur geringe Veränderungen erleidet. Die sogenannte Meßschnur, deren man sich in frühern Zeiten aus Bequemlichkeit oder Unwissenheit sehr häufig bediente, muß auch bei kleinern Längenmessungen der gemeinen Feldmeßkunst verworfen werden; denn wenn auch eine solche Schnur, aus Hanf oder Bast, noch so sorgfältig zubereitet, in Oel gekocht und dann mit Wachs überzogen worden, so erleidet doch ihre Länge durch Anspannung beim Messen, durch Feuchtigkeit u. s. w. mehr oder weniger Veränderungen.

Die Meßkette ist ihrer Einrichtung nach so allgemein bekannt, daß eine vollständige Beschreibung hier

ganz überflüssig wäre. Es ist besser und zuverläßiger, wenn die Kette aus Stahl gemacht wird, weil sich die Glieder aus gemeinem Eisendraht zu leicht verbiegen und ausziehen lassen. Die Längen der Glieder (vom Mittelpunkt eines Ringes bis zum Mittelpunkt des nächsten) müssen durchaus sich gleich bleiben. Daher ist die Anfertigung einer guten ganauen Meßkette so leicht nicht, wie Manche glauben, und die meisten Meßketten, die ich zu prüfen Gelegenheit hatte, waren mehr oder weniger falsch. In diesem letzteren ungünstigen Falle muß ein Vermesser die wahre Länge seiner Kette, wenn sie dennoch gebraucht werden soll, zuvor vermittelst sehr genauer Maßstäbe (étalons) erforschen; überhaupt muß man nie versäumen, die Länge seiner Kette, wenn sie auch noch so gut gearbeitet ist, vor einer neuen Messung wiederholt nach sichern Maßstäben zu prüfen, weil sich bei öfterm Gebrauch ihre Länge wohl um einige Zoll vergrößern kann. In der Vernachläßigung dieser Vorsichtsregeln liegt zum Theil der Grund so vieler fehlerhafter Aufnahmen.

Die gewöhnlichen Meßketten sind 5 bis 6 Ruthen lang; die größern Ruthenabtheilungen werden durch größere Ringe, die kleinern Abtheilungen in einzelne Decimalfuß der Ruthe, werden durch kleinere Ringe unterschieden. Die Rheinländische Ruthe = 12 Duodez- oder 10 Decim.Fuß, wird von Geometern in Deutschland als Normalmaß gebraucht; eine Länge nach diesem Maß läßt sich erforderlichen Falls sehr leicht auf eine Länge nach einem andern Landesmaß reduciren, wenn man die Verhältnißzahl zwischen diesem und dem Rheinländischen Maß kennt. Kleinere Längenunterschiede, als 1 Decimalfuß der Kette ist, müssen, wenn bei wirklicher Vermessung etwas darauf ankommt, vermittelst eines eingetheilten Fußmaßes bestimmt werden.

In Frankreich giebt man gewöhnlich der Meßkette

eine Länge von 5 oder 10 Mètres; jede Mètrelänge ist wieder aus 5 Theilen, jeder gleich 2 Decimètres, zusammengesetzt. Man macht eine solche insgemein gegen 2 Decimètres über 10 Mètres lang, weil man mit Grund annimmt, daß sich bei einer Längenmessung die Kette nicht in eine gerade Linie ausspannen läßt, und daß bei einer zu gewaltsamen Anziehung derselben, um sie in gerade Linie zu bringen, entweder die Ringe reißen, die Kettenstäbe nachgeben, oder Verlängerungen in der Kette entstehen können; daß also wahrscheinlich die erwähnte kleine Längencompensation der nicht allzustraff gespannten Kette noch das zuverläßigste Resultat verschaffen könne.

In England wird, so viel ich weiß, zu Landesvermessungen eine stählerne Kette gebraucht, welche 66 Englische Fuß lang und in 100 Theile getheilt ist; jedes Glied vom Mittelpunkt eines Ringes bis zum Mittelpunkt eines folgenden ist demnach 7,92 Zoll lang.

Maßstäbe werden zur Messung gerader Distanzen mit weit größerer Zuverläßigkeit, jedoch mit mehr Mühe, als Ketten gebraucht. Wenn es sehr weit ausgedehnte trigonometrische Aufnahmen gilt, wobei man Netze von großen Dreiecken erhält, so muß die Hauptgrundlage der ganzen Arbeit eine nach irgend einem Maß sehr genau bestimmte Standlinie, Basis seyn. Die Messung einer solchen Basis ist eine von den bedeutendsten nnd feinsten Operationen der Erdmessung; von ihrer Genauigkeit, so wie von der Messung der Winkel hängt die richtige Bestimmung der Entfernung und Lage der Oerter auf der Erde ab. Die Standlinien müssen in Verhältniß zu den Seiten der Dreiecke, wozu sie gehören, eine beträchtliche Länge haben und horizontale gerade Linien seyn; auch müssen sie nach einem Längenmaß, das genau bekannt und auf einen gleichen Grad der Temperatur reducirt ist, bestimmt

werden. Dies sind Bedingungen, gewiß nicht leicht zu erfüllen, wenn sichs um Messung einer sehr langen Basis handelt; es bedarf hiezu nicht allein genauer Werkzeuge sondern auch eines sachkundigen, gewissenhaften Geometers.

Zur Messung kleinerer Standlinien bedient man sich insgemein der Maßstäbe von gutem ausgetrockneten Tannenholz, welche in kochendem Oel eingetränkt und dann mit einem dicken Firniß überzogen werden; dadurch werden sie, weniger als sonst, gegen den hygrometrischen (Feuchtigkeits-) Zustand und den Wärmewechsel der Atmosphäre empfindlich gemacht. Insgemein besteht ein solcher Maßstab aus einer viereckigen prismatischen Stange, zwei Zoll dick, gegen drei Zoll breit, und 6 Fuß lang, zu größern Messungen auch wohl 10 Fuß lang oder noch länger. Dieser Maßstab wird, mittelst eines guten Stangenzirkels, sehr genau in Fuße, Zolle u. s. w. getheilt; die Theilung kann durch Einschnitte oder mit einem Farbematerial bemerklich gemacht werden. Mehr Gewißheit, als dieser einfache Maßstab, wird ein zusammengesetzter nach folgender leichten Construction (Fig. 20.) gewähren. Die Aerme des geschobenen Vierecks (Raute) A B C D und der Diagonalarm C D dienen dem Maßstab A B zur Stützung, und hindern dessen so leicht mögliche Krümmung. Man muß wenigstens zwei solche Maßstäbe haben, und dieselben sehr genau justiren. In Frankreich braucht man wirklich dergleichen, und giebt ihnen dort gemeiniglich eine Länge von 5 Mètres. Bei einer Messung legt man sie auf eine Brücke von mehreren auf dreifüßigen Schemeln fest aufgestellten Bretern u. s. w.

Zu der großen astronomisch = trigonometrischen Messung in Frankreich, die man zugleich zum Behuf eines fest zu bestimmenden Decimal-Maßes unternahm, wurden Maßstäbe (règles) aus Platina und Kupfer

gebraucht, welche vermöge einer sehr kunstreichen Einrichtung zugleich Metallthermometer waren. Bei der Messung wurden dieselben mit ihren Enden nicht an einander gelegt, um den Zurückstoß (recul) derselben bei der Berührung zu vermeiden; der kleine Abstand zwischen ihren Enden beim Auflegen und fortgesetzten Messen wurde mittelst eines graduirten kleinen Maßstabes (languette) bestimmt. Es ist eine, jedem Anfänger bekannte und gewisse Thatsache, daß die Ausdehnung (Volumen) eines festen Körpers mit dem Wechsel seiner Temperatur verändert wird. Die französischen Geometer und Physiker fanden bei sehr sorgfältig darüber angestellten Versuchen, daß Platina sich mit jedem steigenden Wärmegrad des hunderttheiligen Thermometers ungefähr um ein 0,00000856 Theilchen, Kupfer um ein 0.000017843 Theilchen, Eisen um ein 0,00001156 Theilchen ihrer Dimensionen ausdehnen. Für Maßstäbe ist aber nur ihre Ausdehnung in die Länge zu betrachten, und bei wirklicher Distanzenmessung auf diesen Umstand allerdings Rücksicht zu nehmen, wenn ein geodätisches Resultat verlangt wird, so genau als es menschliche Kräfte zu geben vermögen. Man nimmt in diesem Falle die Länge eines metallenen Maßstabes bei einem bestimmten Wärmegrad des hunderttheiligen (man kann auch das 80theilige brauchen, und dessen Grade auf solche des 100theiligen durch das Verhältniß 4 : 5 reduciren) Thermometers als Normalmaß an; da nun bei fortgesetzter Messung dieser Maßstab wegen der veränderlichen Temperatur der Luft seine Länge um etwas Weniges verändern, nehmlich abwechselnd sich verlängern oder verkürzen kann, so reducirt man diese veränderte Länge auf die Normallänge, nach Verhältniß der Normaltemperatur und der veränderten Temperatur des Maßstabes, wozu man ein eignes Register der Wärmeveränderungen halten

muß. So kann zuletzt die Länge der ganzen gemessenen Basis auf eine solche gebracht werden, die mit der Länge der gebrauchten Maßstäbe bei einer bestimmten Temperatur correspondirt.

Damit der Gang einer solchen Reduction gemessener Distanzen den denkenden Lesern ganz deutlich werde, stehe hier folgende Erläuterung:

Es muß bei jeder Längenmessung ein Maßstab gebraucht, dieser Maßstab selbst aber nach einem festgesetzten unveränderlichen Einheitsmaß, es sey nun ein Mètre oder ein Rheinl. Fuß oder ein andrer Fuß, seiner Länge nach bestimmt und darnach eingetheilt seyn. Nun sey z. B., wie es in Frankreich geschehen, die Länge eines Mètre durch ein Lineal von Platina bei der Temperatur von 0^0 (Eispunkt) des hundertgradigen Thermometers, bestimmt und als unveränderliches Längeneinheits-Maß festgesetzt worden. Es sey durch physikalische Untersuchungen bekannt, daß das Mètremaß von Platina sehr nahe um ein 0,00000856 Theilchen, der Maßstab von Eisen aber um ein 0,00001156 Theilchen seiner Länge zunehme, wenn die Temperatur dieser Metalle um einen Grad des 100theiligen Thermometers zunimmt, und umgekehrt.

Der Kürze halber mögen die Verhältnißzahlen der Ausdehnungen d und D heißen, nehmlich:

$$0{,}00000856 = d.$$
$$0{,}00001156 = D.$$

Sind nun, wie man gefunden hat, die Ausdehnungen der erwähnten Metalle durch alle Grade der Wärme von 0^0 (Eispunkt) bis 100^0 (Siedepunkt) ziemlich gleichförmig, so ist klar, daß das Normalmètremaß, bei 0^0 angefertigt und bestimmt, eine größere Länge bekommt, wenn die Temperatur desselben über 0^0, z. B. 10^0 ist, und daß in diesem Falle die Mètrelänge, welche es anzeigt, wenn wir dieselbe = 1 setzen, eigentlich nur $1 - 10\,d$ ist.

Nun sey ein Maßstab aus Eisen bei einer Temperatur von 10° nach dem Maß des Mètre aus Platina bestimmt und justirt worden. Mit diesem eisernen Maßstab sey ferner eine Distanz oder horizontale Länge auf der Erde gemessen, gleich L Mètres gefunden worden, und zwar bei einer andern Temperatur, z. B. bei einem mittlern Wärmegrad von 18° des hunderttheiligen Thermometers. Die Zahl von L Mètres soll demnach so reducirt werden, daß sie in Normalmètres, bei 0° Temperatur, ausgedrückt wird.

1 Mètre aus Platina ist bei 10° Temperatur = 1 — 10d (Norm. Mètre). Nach diesem Maß sey ein Mètremaß aus Eisen bei 10° bestimmt; die Zahl von Graden, welche von 10° subtrahirt werden muß, um den Grad der Temperatur zu bekommen, bei welchem ein Mètre aus Eisen an Länge gleich ist einem Normalmètre aus Platina bei 0°, sey = x°; so erhellt, daß

1 Mètre aus Eisen bei 10° bestimmt = (1 — xD) Norm. Mètre. Da nun bei 10° die beiden Maße aus Platina und Eisen gleich gemacht sind, so folgt offenbar, daß

$$1 - 10d = 1 - xD, \text{ also}$$

$$xD = 10d, \text{ also}$$

$$x = \frac{10d}{D}.$$

Nach der obigen Angabe ist also:

$$x^0 = \frac{10, \times 0{,}00000856}{0{,}00001156} = 8^0 \text{ sehr nahe.}$$

Folglich ist $10^0 - x^0 = 2^0$ sehr nahe.

Hieraus läßt sich schließen, daß eine Mètre-Länge aus Eisen bei 2° Grad gleich ist der Normal-Mètre-Länge aus Platina bei 0° Grad.

Gesetzt also, es sey mit dem erwähnten Mètre-Maß aus Eisen bei einer mittlern Temperatur von 18° eine Distanz gemessen, und gleich L Mètres gefunden worden, so ist dieselbe auf das Normal-Mètre reducirt:

$$= \frac{L}{1 - 16^0 D} = \frac{L}{1 - 16 \times 0{,}0000115 \ldots}$$

$$= \frac{L \text{ . mètr.}}{0{,}99982 \ldots}$$ Normalmètres sehr nahe.

Man ersieht hieraus, daß die gemessene Distanz L bei 18° zu klein gefunden worden ist. Bei kleinen Distanzen beträgt dieser Unterschied sehr wenig, bei größern hingegen kann er für genaue geodätische Vermessungen so beträchtlich werden, daß er durchaus nicht außer Acht gelassen werden darf. Wäre z. B. nach den erwähnten Angaben L = 10000 Mètres gemessen, so wäre dieselbe reducirt = 10001,7 . . . Normalmètres von Platina bei 0°; also die gemessene Distanz um 1,7 Mètres zu klein, welcher Fehler bei einer großen Triangulirung nicht gestattet werden darf. Daß das Normalmètre aus Platina bei 0° bestimmt wurde, geschah darum, weil sich diese Temperatur vermittelst schmelzenden Eises immer leicht, identisch und auch anhaltend erlangen läßt. Indessen ist dieser Grad der Temperatur bei der Normalbestimmung nicht durchaus nöthig; wäre das Mêtre aus Platina bei einer andern Temperatur, z. B. bei 6° des 100theiligen Thermometers festgesetzt worden, so würde nach den vorigen Angaben bei 10°

eine Mètrelänge aus Platina = 1 — 4 d

$$x = \frac{4^d}{D},$$

also eine Mètrelänge aus Eisen bei $\left\{10 - \frac{4^d}{D}\right\}^\circ$

der Normal-Mètrelänge aus Platina, bei 6° bestimmt, gleich zu setzen seyn.

Dies Beispiel der Reduction wird dem Leser genügen, um einzusehen, wie die Reduction der gemessenen Distanzen bewerkstelligt werden muß, wenn das Normalmaß ein andres Maß als das Mètre, z. B. ein Rheinl. Dec.Fuß, das Material dazu ein andres Metall als Platina, der darnach zu justirende Maßstab ebenfalls von einem andern Material als Eisen ist, und statt des 100theiligen das 80theilige Thermometer gebraucht wird u. s. w.

Man sieht wohl ein, daß zu dieser Art von Correction drei Dinge unumgänglich nothwendig sind:

1) ein bestimmtes unveränderliches Längenmaß, von dessen Darstellung im folgenden §. das Wichtigste beigebracht wird;
2) eine genaue Kenntniß von den Dimensions-Veränderungen, welche feste Körper: Metalle, Holz u. s. w. durch den Wechsel der Temperatur erfahren, und vergleichende Tabellen hierzu;
3) genaue Beobachtungen des Wärmegrades, welchen ein Maßstab aus Metall, Glas, Holz ꝛc. bei einer Distanzenmessung zu verschiedenen Zeiten, anzeigt.

Dies sind alles schwere Bedingungen, die aber bei großen Vermessungen, wenigstens so genau, wie es die Umstände erlauben, erfüllt werden müssen; bei kleinern Aufnahmen von einigen Quadratmeilen, bei welchen die Meßkette, der Meßtisch u. s. w. ausreichen, fällt natürlich eine so feine Correction ohne Nachtheil weg.

Die erwähnten, zur französischen großen Messung gebrauchten Maßstäbe von Platina, deren man vier hatte, sind 12 Pariser Fuß lang, 6 Linien breit und 1 Linie dick. Ein jedes dieser großen Lineale ist mit einem Lineal von Kupfer bedeckt, welches 6 Zoll kürzer

ist, als das Lineal von Platina; beide sind bloß an einer Seite ihrer Enden zusammenbefestigt, damit sich die Ausdehnung beider Metalle bloß an dem andern freien Ende zeigen kann. Man schätzt nun in jedem Augenblick den Einfluß der Wärme durch die Größe, um welche sich das Kupfer mehr ausdehnt als die Platina, vermittelst einer sehr feinen Vorrichtung, deren Beschreibung hier zu weit führen würde *).

Auch Maßstäbe von Glas sind schon versucht worden, da die Ausdehnung desselben durch die Wärme weniger beträgt, als die des Eisens, Stahls und Kupfers. Im Jahr 1784 gebrauchte man in England zur Messung einer Basis zu Hounslowhead mit gutem Erfolg sehr lange Glasstäbe. Aus deshalb angestellten Versuchen ergab sich, daß massive Glasstäbe sich mehr ausdehnen, als Glasröhren. Allein das Messen mit solchen Maßstäben hat unvermeidliche Schwierigkeiten, und man fand in England, daß sich eine Basis mittelst einer vollkommen genau gearbeiteten stählernen Kette, bei gehöriger Vorsicht und Correction wegen der Temperatur, eben so sicher oder noch sichrer bestimmen lasse, als durch gläserne Maßstäbe. Man maß von einer Basis, anderweitig auf 27404,7 Fuß bestimmt,

---

*) Die ganze Einrichtung dieser künstlichen thermometrischen Maßstäbe und die darauf sich beziehenden sorgfältigen Untersuchungen, so wie den practischen Gebrauch derselben findet man sehr ausführlich beschrieben in einem sehr voluminösen Werk, welches über die große Vermessung in Frankreich, in den Jahren 1792 u. folg., von Delambre redigirt, unter dem Titel erschienen ist:

Base du Système mètrique, ou mesure de l'arc du Méridien etc. in 3 Tom. in 4. Paris 1806 — 1810. — Von den Maßstäben (régles) im 3ten Vol. p. 313 etc.

eine Länge von 1000 Fuß mit der Kette und auch mit gläsernen Maßstäben, und fand die dabei sich ergebende Differenz so gering, daß sie auf die ganze Basis etwa $\frac{1}{2}$ Zoll betrug. Man verband zwei Basen, die 60 Meilen von einander lagen, durch ein Netz von 24 Dreiecken, und fand nach trigonometrischer Beobachtung und Berechnung, daß der Unterschied der einen Basis direct bestimmt, und derselben Basis berechnet, nur $4\frac{1}{2}$ Zoll betrug; eine Genauigkeit, mit der man in jedem Fall zufrieden seyn muß. Hölzerne Maßstäbe eignen sich nicht zur genauen Messung sehr langer Basen, weil die Dimensionsveränderungen des Holzes von mehrerlei Ursachen herrühren, nicht so regelmäßig als die der Metalle von der Temperatur abhängen, und dadurch die Correction der gemessenen Basislänge unsicher wird. (Base du Syst. mètr. Tom. III. p. 501.) Was von den Maßstäben bisher erinnert worden ist, wird für unsern Zweck völlig hinreichen. Man kann aber nach dem bestimmten Einheitsmaß selbst fragen, dem gemäß die Maßstäbe getheilt, und nach welchem die Distanzen der Basen ausgedrückt werden.

§. 53.

Normal-Längenmaß, oder fixes Maß der Einheit.

Es wäre sehr nützlich, wenn unter allen cultivirten Völkern der Erde nur ein gleiches unveränderliches Längeneinheits-Maß gäbe. Wornach soll man aber ein solches Maß bestimmen, um an allen Orten darüber einig zu werden, und in ungewissen oder streitigen Fällen über die wahre Länge des gebrauchten Normal-Maßes zu entscheiden. Es giebt am Himmel und auf Erden keine einzige Distanz (Länge), welche unveränderlich die-

selbe unter allen Umständen bleibt, oder welche, wenn sie unveränderlich ist, aus ihrer wirklichen geometrischen Größe bekannt, zur Berichtigung und Justirung eines gemeinsamen Maßes zu Gebote stände. Der Abstand der Fixsterne, die Durchmesser der unsrer Erde sehr nahen Himmelskörper sind nur scheinbare Größen für unser Auge, nehmlich bloß durch die Größe des Winkels, unter welchem sie unserm Auge erscheinen, bestimmt. Auf unsrer Erde giebt es kein Naturproduct, das überall dieselben Dimensionen zeigte.

Der erste und natürlichste Gedanke der Menschen war in Hinsicht eines Normal-Maßes, die Länge eines Theiles von einem gesunden, wohlproportionirten, erwachsenen Mann hierzu anzuwenden; fast alle Völker haben die Länge eines Mannsfußes gewählt, daher der Name Fuß. Diese Länge ist aber sehr veränderlich. In Deutschland suchte man sich im Mittelalter dadurch zu helfen, daß man mehrere ungleiche Männerfüße zusammensetzte, und die arithmetische Mittelzahl einen Fuß nannte. So erhält man schon etwas Erträglicheres, aber immer noch nichts Gewisses. In einem alten Buche des Sächs. Landrechts steht: 15 Füße machen eine Ruthe, dieselbe sollen 15 Bauern messen, wie sie des Morgens nach einander aus der Kirche gehen. Dies klingt spashaft; aber ist, genau und unparteiisch betrachtet, die neue so laut gepriesene Methode der Franzosen, ein fixes Längenmaß (Mètre) durch Messung eines Stückes vom Meridianquadranten zu erlangen, wohl um vieles besser und zuverläßiger? — So mag wohl der Unterschied der Fußmaße in verschiedenen Provinzen Deutschlands zu erklären seyn; welcher Fuß ist nun der wahre? Sonderbar muß es scheinen, daß bloß die Deutschen von Alters her und zum Theil noch jetzt den Fuß einen Schuh nennen, um vielleicht damit zu bezeugen, daß sie keine Barfüßer seyen. Wegen

des Modewechsels würden die Schuhlängen noch ungewissere Maße geben als die nackten Füße. Der Turiner Fuß, gegen $1\frac{1}{2}$ Pariser Fuß lang, soll vom Fuß eines Longobardischen Königs abstammen; damit muß doch wohl sein Schuh gemeint seyn.

Gelehrter, aber auch wirklich vernünftiger war der Gedanke, aus der genau bestimmten Länge eines Sekundenpendels ein allgemeines fires Längenmaß abzuleiten. Diese Pendellänge und die Messungen von Graden größter Kreise auf der Erdoberfläche in verschiedenen Ländern (beim Cap de bonne esperance von Lacaille, im päpstlichen Gebiet von Boscowich, in Oesterreich von Liesganig, am Polarzirkel von Maupertuis, am Aequator von Bouguer und Condamine, in Frankreich endlich von Delambre und Mechain ꝛc.) sind in den neuern Zeiten ein Gegenstand der fleißigsten Nachforschung sehr ausgezeichneter Geometer und Physiker gewesen. Auf dem einen und andern Wege gedachte man, außer einer richtigern Ansicht von der Gestalt und Größe der Erde, zugleich ein allgemeines unveränderliches Längenmaß zu erlangen, wovon sich das Original in der Natur selbst vorfände. Picard verband beide Methoden, damit man zu jeder Zeit den Werth seiner Toise wieder finden könnte; die Pendellänge, welche er zum allgemeinen Maß vorschlug, nannte er den astronomischen radius (rayon astronomique); seine Toise aber ist nicht zuverläßig, nehmlich in einem Original unter öffentlicher Autorität, erhalten worden. — Cassini schlug einen geometrischen Fuß vor, welcher gleich dem sechstausendsten Theil von 1 Minute (gemessenem Bogen) eines großen Kreises auf der Erde u. s. w. wäre. Die Idee, aus der wirklichen Natur ein bestimmtes Längenmaß zu entlehnen, wurde von mehreren Mathematikern mit vielem Eifer verfolgt. In Frankreich ist zuletzt als allgemeines Längenmaß

das sogenannte Mètre angenommen worden; ein Mètre soll, nach der Bestimmung der französischen Mathematiker, der zehnmillionste Theil eines Meridianquadranten (in Bogenlänge) seyn; diese Bogenlänge wurde hergeleitet aus der, von den allerdings sehr ausgezeichneten Mathematikern Delambre und Mechain ausgeführten, Gradmessung von Dünkirchen bis Barcellona; der Abstand der Parallelen zwischen beiden Städten ist durch eine sehr schwierige Basenmessung und eine weitläufige Triangulirung mit astronomischen Bestimmungen gefunden worden. Ferner haben gewisse Annahmen oder Hypothesen von der Abplattung der Erde u. s. w. zur Bestimmung der Bogenlänge des Meridianquadranten nach Toisen-Maß, nothwendig Statt finden müssen. Hieraus wird nun jeder denkende Leser schließen, wie zuverläßig das aus der Natur entlehnte Maß, Mètre, seyn müsse. Ich bin überzeugt, daß dies Mètre, wenn es zugleich mit dem Toisen-Maß, womit die Messungen der Basen geschahen, ganz verloren ginge, bei einer zweiten Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcellona von andern Mathematikern mit andern Werkzeugen und andern Voraussetzungen, nicht ganz als dasselbe wieder gefunden, und daß eine jede neue Messung etwas Andres geben würde. Besser möchte es seyn, einen kleinern Bogen zwischen Parallelen zweier bestimmten Punkte eines Landes zu messen, und einen aliquoten Theil der genau bestimmten Bogenlänge als allgemeines Maß (Mètre) für ein Land festzusetzen. Ein solches ließe sich leichter wiederfinden.

Sichrer oder doch wenigstens eben so sicher, als die eben erwähnte Methode, ein allgemeines Maß auszumitteln, scheint mir die Bestimmung eines solchen aus der an einem bestimmten Ort genau beobachteten Länge des Sekundenpendels zu seyn. Aus der Physik ist bekannt, daß die Schwingungen eines vollkommen

eingerichteten Pendels von einer gewissen unveränderlichen Länge in kleinen Schwingungsbogen gleichzeitig sind, nehmlich an einem und demselben Ort auf der Erde, daß umgekehrt die Länge eines Pendels, welches zu einer Schwingung (Oscillation) in kleinen Bogen eine gewisse Zeit, z. B. 1 Sek. astronomischer Zeit gebraucht, an einem bestimmten Orte eine unveränderliche Länge ist, so weit nehmlich die zeitherigen Beobachtungen reichen. An verschiedenen Oertern der Erde, unter verschiedenen Breiten gegen die Pole hin, zeigen sich diese Längen der Sekundenpendel etwas verschieden; nach den darüber angestellten und bekannt gewordenen Beobachtungen ist dieselbe z. B. in Quito, bei $0^{0}25'$ nördlicher Breite, 439,1 Par. Lin. gleich, zu Kola in Lappland, bei $68^{0}52'$ nördl. Br., 441,31 Par. Lin., zu Paris, bei $48^{0}50'$ nördl. Br., 440,6 Par. Lin. u. s. w. Hier, in Berlin, findet sich die Länge des einfachen Sekundenpendels = 3 Fuß 2 Zoll (Duodec. M.) = 38 Duod. Zoll nach Brandenb. Maß; der Berl. Fuß verhält sich zum Pariser Fuß nahe wie 139,3 : 144,0. — Da nun an einem und demselben Orte die Länge eines Sekundenpendels unveränderlich zu seyn scheint; so würde es, um für ein Land ein aus der Natur und Kunst abgeleitetes Normal-Längenmaß zu erhalten, nur darauf ankommen, an einem bestimmten Ort, etwa in der Hauptstadt des Landes, die Sekundenpendellänge mit der Vorsicht, welche die Physik lehrt, und mit genauer Zeitbeobachtung, die zwar schwierig aber vermittelst guter astronomischer Pendeluhren und Beobachtungen immer erreichbar ist, auszumitteln, und die so gefundene Länge selbst, oder einen aliquoten Theil derselben, als Längeneinheit festzusetzen. Eine solche Bestimmung ist offenbar directer und zuverläßiger, als diejenige des Mètre aus der Länge des Bogens von einem Meridianquadranten, die selbst nur indirect, mit Zuziehung von

Hypothesen, nach einem andern als bekannt angenommenen Längenmaß, bestimmt wurde.

Die von Borda und Cassini über die Länge des Sekundenpendels zu Paris sehr genau ausgeführten Versuche sind ausführlich beschrieben in dem erwähnten sehr lehrreichen Werk: Base du Système metrique etc. im 3ten Tom. p. 337 sqq. Das Resultat dieser interessanten Versuche, die ich sehr gern im Auszug mittheilen möchte, wenn ich nicht den Vorwurf zu großer Weitläufigkeit befürchten müßte, war, als arithmetisches Mittel mehrerer Beobachtungen, dieses:

Die Länge eines Sekundenpendels (für mittlere Sonnenzeit) ist auf dem Observatorium zu Paris gleich 50999,6 Theilchen des gebrauchten Maßstabes (règle), wenn man sich diesen in 200000 Theile abgetheilt vorstellt; oder auf Theile der Toise, die zur Messung des durch Frankreich gehenden Meridianbogens gedient hat; reducirt ist diese Länge gleich 440,5593 Linien, die Toise = 6 Par. Fuß = 864 Lin. gesetzt. Hätte es nun den Franzosen bei ihrer neuen Mètrebestimmung gefallen, den dritten Theil der gefundenen Länge des Sekundenpendels zu Paris als neuen Pariser Fuß anzunehmen, so wäre derselbe = 146,8531 alte Par. Lin. geworden, also um etwas größer als der alte Par. Fuß = 144,0000 Lin. Hätte es aber beliebt, zum Einheitsmaß, Mètre, die ganze Pendellänge zu nehmen, so wäre dasselbe = 440,5593 Par. L. geworden; das durch Kalkul herausgebrachte Mètre ist aber = 443,296 P. L., folglich das künstliche Mètre größer, als das weniger künstliche und mehr natürliche Mètre der Pendellänge. Die Decimaleintheilung des französischen Maßsystems verdient indessen allen Beifall, hat viel Gutes für sich, und sollte füglich in allen cultivirten Ländern gebraucht werden.

Nähere Belehrung über die Versuche mit Pendeln

und die daraus abgeleiteten Folgerungen, muß der wißbegierige Leser in guten Lehrbüchern der Physik suchen.

§. 54.

Vergleichung der verschiedenen Längenmaße.

Da nun einmahl aus begreiflichen Ursachen die Längeneinheitsmaße verschiedener Länder und sogar zum Theil verschiedener Provinzen eines Staats mehr oder weniger von einander abweichen, und bei geodätischen und geographischen Bestimmungen sehr oft die Nothwendigkeit eintritt, ein Maß auf ein andres zu reduciren, so muß es ein Mittel geben, die verschiedenen Maße (gewöhnlich Fuße) gegen einander zu vergleichen.

In Frankreich wurde auf Verordnung der Regierung durch eine Commission gelehrter Männer: Mascheroni, Multedo, Coulomb, Méchain, Delambre ꝛc. die definitive Länge des neuen Mètre $= \frac{1}{10\,000\,000}$ des Meridianbogens zwischen einem Pol und dem Aequator der Erde, aufs genaueste in Originalmaßstäben von Platinametall ausgedrückt, und darnach wurden auch mehrere Maßstäbe von Eisen angefertigt; mit diesem Mètre wurden dann zwei eiserne Maßstäbe, welche Toisen vorstellen, und zu Gradmessungen früher am Aequator bei Perou und am Polarzirkel dienten, in Hinsicht ihrer Länge verglichen. Die beiden Toisenmaße, nehmlich die Toise du Perou und die Toise du Nord wurden völlig gleich befunden.

Ferner wurde durch eine besondre Commission die Vergleichung des Mètre mit dem Englischen Fuß vorgenommen. Den Englischen Fuß stellte ein sehr fein gear-

beiteter und getheilter Maßstab (étalon) von dem berühmten Englischen Künstler Troughton in London vor; man brauchte ein von demselben Künstler gearbeitetes Instrument, Comparateur, um die kleinsten Differenzen der Maße zu schätzen. Die Beschreibung dieses Comparateur würde hier zu viel Raum einnehmen; ich muß mich darauf beschränken, zu bemerken, daß vermittelst einer feinen Theilung auf der Fläche des Instruments, die durch Nonien noch Unterabtheilungen erhielt, zweier gegen diese Fläche senkrecht gerichteter Microscope, und das Auflegen des zu vergleichenden Maßstabes, es möglich wurde, die Unterschiede zweier Maße bis auf $\frac{1}{10000}$ eines Englischen Zolles zu bemerken. Ramsden, dieser geistreiche Künstler, hatte sich im Jahr 1785 eines ähnlichen Mittels bedient, um die Ausdehnung der Metalle zu messen; von seinem Instrument hierzu hat der, wegen seiner großen Messung in England bekannte, General Roy in den Philosoph. Transactions eine Beschreibung gegeben.

Mit Hülfe des Comparateurs wurden von Pictet, Legendre, Méchain, Delambre und Lenoir (einem berühmten Künstler in Paris) zwei Mètre-Maßstäbe (étalons), einer von Platina und der zweite von Eisen mit dem Englischen Fuß verglichen; diese Mètres waren bei 0^0 des 100theiligen Thermometers einander völlig gleich, nehmlich das definitive Einheitsmaß; bei $15\frac{3}{10}^0$ Temper. war das Mètre von Platina = 39,3775 Engl. Zoll, das Mètre von Eisen hingegen = 39,3788 Engl. Zoll; welches sich aus der ungleichen Ausdehnung der Metalle durch gleiche Wärmegrade erklärt. Bei keiner genauen Vergleichung der Maßstäbe darf dieser Umstand unbeachtet bleiben.

Nach einer Berichtigung dieses Resultats fand man, daß bei 0^0 Temp. das Mètre sehr nahe = 39,3827 . . . Engl. Zoll sey.

Damit noch nicht zufrieden, stellte man weiterhin noch eine Vergleichung der Maße an, vermittelst eines andern Comparateurs, von Lenoir ausgeführt *), welches kunstreiche mit Mikrometern versehene Instrument, der Angabe nach, im Stande war, die (fast unglaublich) geringe Differenz von $\frac{1}{100000}$ der Toise, ungefähr $\frac{1}{1200}$ einer Par. Linie anzuzeigen. Man gebrauchte zur Vergleichung die Toise, welche zu der Gradmessung am Polarkreis, und die Toise, welche zu der Gradmessung von Bouguer am Aequator gedient hatte, und welche letztere das authentische Normalmaß für das ältere Maßsystem war; ferner die Maßstäbe von Platina und Kupfer, welche zur letzten Bestimmung der Pendellänge, so wie zur Messung der Basen von Melun und Perpignan gebraucht worden waren; ein Mètre von Platina; ein einfaches und ein Doppel-Mètre von Eisen. Zwischen dem Mètre und dem Englischen Maß fand man wieder das vorerwähnte Verhältniß. Die Toise von Bouguer war bei $13\frac{1}{2}^{0}$ des 100th. Therm. = 76,7394 Engl. Zoll u. s. w.

Bei dieser Untersuchung beobachtete man einen bemerkenswerthen Umstand, welcher auch in dem Werke von Laplace: Exposition du Système du monde, angeführt wird: Wenn nehmlich ein metallner Maßstab mehrere Stunden unbewegt über dem Comparateur liegen bleibt, und seine Temperatur während dieser Zeit durch einen Stoß oder schwaches Reiben verändert wird; so zeigt der Comparateur sogleich eine Längenänderung; man kann hieraus schließen, welche zarte Behandlung und Vorsicht bei Untersuchungen der Art

---

*) Er ist beschrieben in der Base du Système metrique im IIIten Tom. p. 473 etc.

nöthig sind; ein Gleiches findet Statt bei Theilungen großer Kreise aus Metall.

Das bisher von der Vergleichung verschiedener Maße Gesagte soll den gebildeten Lesern einen Begriff von der besten Methode geben, wie ein so äußerst schwieriges delikates Geschäft unternommen werden muß; die gewöhnlichen Methoden sind bekannt genug.

Was nun die Vergleichung der Maße verschiedener Länder, und die darauf sich beziehenden Tabellen anlangt, so siehet man wohl ein, daß irgend ein Einheitsmaß, dessen Länge man bestimmt kennt, der Vergleichung anderer Maße zu Grunde gelegt werden muß. Man ist gewohnt, hierzu den alten Pariser Fuß, gleich dem sechsten Theil der authentischen Toise, wovon vorher gesprochen worden, zu gebrauchen.

§. 55.

Vergleichungs-Tabelle für einige sehr gebräuchliche Maße.

Der alte Pariser Fuß (pied du Roy), der Toise von Bouguer gemäß, wird nach der Duodec.-Eintheilung in 144 Par. Lin. getheilt und von diesen Linien nimmt man noch Zehntel u. s. w. Nach mehrseitigen, zum Theil sehr sorgfältigen Vergleichungen mehrerer Normalmaße mit diesem Pariser Fuß, sind folgende Verhältniße ausgemittelt worden, wovon jedoch mehrere, wegen der Unzuverläßigkeit der verglichenen Maße selbst, auch wohl wegen Ermangelung eines genauen Comparateurs, nicht in aller Schärfe richtig seyn mögen.

Pariſer Fuß = 144,00 Pariſer Linien.
Franz. Mètre *) = 443,296 = =
Rheinländ. Fuß = 139,13 Par. Lin. (gewöhnl. Ang.)
oder = 0,31385 mètre def.
(ſchwankend u. unſicher)
Wiener Fuß = 140,13 (nach einer andern Angabe 140,12)
Berliner Fuß = 139,13 (nach einer neuen Beſtimmung)
oder = 0,31385 Mètre définitif
= 3 Decimètres, 1 Centimètre u. 4 Millimètres ſehr nahe.
Ruſſiſche Fuß = 238,56 (2386 n. ein. n. Beſt.)
Sächſiſcher Fuß = 125,20 (125,30 = = =)
Münchener F. = 128,25
Wirtemberger F. = 127,80 (andre Angabe: 126,80)
Amſterdamer F. = 125,70 (= = 125,50)
Hannöveriſcher F. = 129,53
England, Fuß = 135,13 (135,15 andre Ang.)
— Yard (Elle) = 405,3
— Ruthe ($16\frac{1}{2}$ F.) = 2229,2
Schwediſcher F. = 131,59
Däniſcher F. = 140,34 ($139,\frac{1}{8}$ andre Ang.)
Spaniſcher F. = 125,3
Rom, Palmo = 99,0.

Damit wollen wir dies Verzeichniß der Längeneinheitsmaße ſchließen.

---

*) Nach der Decimal-Eintheilung iſt ferner:
1 Decimètre = $^1/_{10}$ Mètre, 1 Centimètre = $^1/_{100}$ Mètre,
1 Millimètre = $^1/_{1000}$ Mètre u. ſ. w.
umgekehrt:
1 Dekamètre = 10 Mètres, 1 Hektomètre = 100 Mètres,
1 Kylomètre = 1000 Mètres, 1 Myriamètre = 10000 Mètres u. ſ. w.

Man kann hieraus schon ersehen, wie abweichend und verschieden Laune und Zufall dieselben gestellt hat, und wie unbequem und unsicher die Reduction gegebener Distanzen und Flächen von einem Maß auf ein andres seyn müsse, da die Verhältnißzahlen unter sich irrational sind. Selbst einzelne Districte und Städte eines und desselben Landes haben oft ihre verschiedenen Maße. Ein vollständigeres Verzeichniß dieser bunten Maßverhältnisse findet man in mehreren Logarithmentafeln, z. B. in den kleinern, in 2 Bänden, von Vega herausgegebenen.

Aus den Fußmaßen werden, wie bekannt, die Ruthen zusammengesetzt; doch ist auch diese Zusammensetzung nicht überall gleich. So besteht z. B. 1 Rheinl. Ruthe aus 12 Rheinl. Fuß (oder = 10 Decimal-Fuß), die Engl. Ruthe aus $16\frac{1}{2}$ Engl. F., die Brandenburgische aus 15 F., die Sächsische aus $15\frac{1}{6}$ F. u. s. w.

Kennt man die Verhältnißzahl zweier Längen- (Fuß-) Maße sehr genau, so ist es immer leicht, eine Länge, in einem Maße gegeben, auf eine Länge zu reduciren, im andern Maß ausgedrückt. Eine nähere Erläuterung dessen durch Beispiele gehört, als ganz elementarisch, nicht hieher; eben so wenig die Darstellung der mannichfaltigen Flächen- und Meilen-Maße, wozu man besondere Tabellen haben muß.

Zu geometrischem und geodätischem Gebrauch sind die Unterabtheilungen der Füße in Zolle, Linien nach dem Decimalsystem unstreitig die besten. Die Franzosen haben dies Decimalsystem auf alle Theilungen, selbst die der Kreisbogen ausgedehnt; man ist aber in andern Ländern, selbst in solchen, wo man gern nachahmt, ihrem Beispiel nicht ganz gefolgt und zwar aus vernünftigen Gründen.

§. 56.

Meßtisch. (Mensula, Planchette).

Zum Trianguliren kleineren Strecken der Erdoberfläche (von mehreren Quadratmeilen), so wie zu Detailaufnahmen ist der Meßtisch, wie wir in der folgenden Abtheilung sehen werden, wirklich ein äußerst brauchbares und bequemes Instrument; dies wird von allen vorurtheilsfreien Kennern der practischen Geometrie einstimmig zugegeben. Die Form und Structur des einfachen Meßtisches ist so allgemein bekannt, daß es, davon ausführlich zu sprechen, unnöthig scheint. Da indessen von der Zeit an, wo der Meßtisch erfunden und zuerst gebraucht wurde, bis auf unsere Zeit so vielerlei Urtheile über die beste Bauart desselben gefällt worden sind, so wird es dienlich seyn, zu zeigen, worin eigentlich das Beste in dieser Sache bestehe, und welche Forderungen man an einen guten Meßtisch zu machen habe.

1) Ein Meßtisch muß so gebaut seyn, daß er die Stellung, die man ihm giebt, durch schwächere Kräfte, z. B. Berührung mit den Händen ꝛc. nicht verliert, und nicht in eine zitternde Bewegung gesetzt werden kann; er muß fest stehen.

2) Die Oberfläche des Tischchens (planchette) muß eine vollkommene Ebene seyn, und diese Gestalt durch äußere Einwirkungen, Feuchtigkeit ꝛc. nicht verlieren.

3) Die Oberfläche des Tisches muß sich genau horizontal stellen lassen, und in dieser Stellung eine sanfte Bewegung um die vertikale Achse (Azimuthal-Bewegung) gestatten. Diese gute Eigenschaft geht den meisten Meßtischen ab.

4) Man muß einen Punkt, der auf dem Meßtisch

angenommen oder gefunden worden, ohne viel Schwierigkeit so nahe als möglich über den ihm entsprechenden oder gleichnamigen Punkt auf der Erde (im Felde) senkrecht stellen, einrichten können; so wie auch eine bereits auf dem Plane des Meßtisches gezogene gerade Linie in die Vertikalebene (alignement) der gleichnamigen Linie auf der Erde. Ohne Uebung ist diese Bedingung mit keinem Meßtisch leicht zu erfüllen.

5) Der Meßtisch mit seinem Stativ muß nicht schwerfällig, sondern möglichst leicht und tragbar seyn.

Dies sind die Forderungen, welche so vielerlei, zum Theil sehr gekünstelte unbrauchbare, Abänderungen des Meßtisches zu verschiedenen Zeiten veranlaßt haben. Es wird hier genügen, wenn bloß von den besten eine kurze Anzeige geschieht, und zuletzt zwei Meßtische näher beschrieben werden, die nach meinem Ermessen zum wirklichen Aufnehmen die brauchbarsten und zuverläßigsten sind.

Ein ganz gewöhnlicher leichter Meßtisch, zu kleinern weniger genauen (z. B. flüchtigen militärischen) Aufnahmen ganz brauchbar, kann aus einem ebenen quadratischen Reisbret von wohl getrocknetem Lindenholze bestehen, das 1 Fuß bis 15 Zoll ins Gevierte hält; die Bewegung desselben kann durch eine sogenannte Nuß geschehen, und das Stativ die gewöhnliche Form haben, welche eben nicht die beste ist. Ich setze die Structur dieses einfachen und wenig kostbaren Meßtisches bei meinen Lesern als bekannt voraus.

Berühmt ist der Marinonische Meßtisch. Derselbe ist so eingerichtet, daß er eine Kreisbewegung um die Vertikalachse des Meßtischblattes, und zugleich eine geradlinigte Seitenbewegung in einer Ebene, Verschie-

bung z. B. von Ost gegen West, in den Nuthen zweier Leisten gestattet, wodurch es möglich gemacht werden soll, einen bestimmten Punkt auf dem Plane des Meßtisches über den ihm correspondirenden auf dem Felde einzurichten. Er ist schwer, etwas zu sehr zusammengesetzt und daher auch gewöhnlich nicht in Gebrauch; jedoch nach richtigen Grundsätzen angelegt. Der Meßtisch von dem zu seiner Zeit sehr berühmten Künstler Brander, welcher vor ihm der geometrische Universalmeßtisch genannt wurde, ist eine Verbesserung des Marinonischen. Die Horizontalstellung geschieht durch 3 Fußschrauben, die grobe und sanfte Bewegung um die Vertikalachse durch ein gezahntes Rad und Schraube ohne Ende; die geradlinigte Seitenbewegung wie beim Marinonischen. Später brauchte Brander statt der quadratischen Form des Meßtisches die kreisförmige, und fügte einen eingetheilten Kreisbogen zum Messen der Horizontalwinkel, und einen vertikalen Halbkreis zum Messen der Höhenwinkel bei. Die gute Bewegung an Brander's Meßtisch abgerechnet, sind die übrigen Künsteleien entbehrlich; dieser Meßtisch hat, wie es mit allen zu sehr complicirten mathematischen Werkzeugen geschieht, nur eine Zeitlang gelebt, und wird in unsern Zeiten nicht angewendet.

Dem Marinonischen und Branderschen Meßtisch wurden weiterhin von andern Erfindern noch andere Arten des Meßtisches mit sehr unwesentlichen Veränderungen nachgebildet; es ist überflüssig, von den vielen vergeblichen Versuchen, etwas Vollkommenes zu leisten, hier umständlich zu handeln.

Ich will daher ohne Weiteres zwei, zu genauern Operationen geeignete, Arten des Meßtisches beschreiben, die jeder unparteiische Leser für die natürlichsten und brauchbarsten mit mir halten wird. Beide haben ihre guten Eigenschaften und Vorzüge, aber keiner lei-

stet jeder Forderung Gewähr, und jedem geht irgend eine gute Eigenschaft des andern ab, so daß man auch hier inne wird, daß sich alles Gute zusammen auf einen Punkt nicht leicht vereinigen lasse.

A) Meßtisch mit drei Stellschrauben.

(Fig. 21.)

Das Meßtischblatt a ist ins Gevierte ungefähr 18 Rheinl. Dec. Zoll groß, von gut ausgetrocknetem Lindenholz verfertigt, und zwar, damit es sich nicht werfe oder Risse bekomme, aus mehreren Stücken so zusammengeleimt, daß sich die Holzfasernlagen durchkreuzen.

An die untere Fläche des Tischblattes im Mittelpunkt desselben ist eine, etwa 3 Zoll im Durchmesser haltende, messingene Platte durch 3 Schrauben befestigt; mit dieser Platte hängt ein etwa 1 Zoll hoher Cylinder b zusammen, entweder aus einem Stück gegossen oder zusammengelöthet; in der cylinderförmigen Höhlung desselben dreht sich, gut anschließend, ein andrer Cylinder c, welcher sich unten in eine kugelförmige Nuß endigt; der Cylinder b läßt mit dem damit fest verbundenen Meßtisch a um den Cylinder c horizontal bewegen, auch davon abheben; durch eine Seitenschraube d kann man b und c zusammenbefestigen und die Bewegung des Tisches um die Achse von c hemmen.

Die Nuß des etwa 2 Zoll hohen Cylinders c läßt sich in einer etwas stark und eng an sie schließenden Hülse nach verschiedenen Richtungen bewegen; das obere Hülsenstück ist durch Schrauben an den darunter befindlichen starken Cylinder G befestigt; man sieht wohl, daß der Meßtisch a vermöge dieser Einrichtung, wenn

b und c fest verbunden sind, auch verschiedene Seitenbewegungen durch die Nuß in ihrer Hülse zuläßt.

Unterhalb dieser Hülse läuft um den Cylinder G ein starker messigner Ring n, mit 3 Schrauben befestigt; mit diesem hängen, aus einem Stück gegossen, 3 messingne Aerme m, wovon man zwei in der Zeichnung sieht, etwa $3\frac{1}{2}$ Zoll lang, zusammen; durch die Enden derselben gehen 3, gegen 4 Zoll hohe Stellschrauben, h, welche sich so hoch hinaufschrauben lassen, daß ihre Enden an die untere Fläche des Tisches treffen, und denselben in einer gewissen Stellung befestigen, nachdem man zuvor die Cylinder b und c durch die Schraube d eng verbunden oder unbeweglich um einander gemacht hat.

Der Cylinder G ist inwendig hohl bis unterhalb der Nußhülse, und in diese Höhlung läßt sich das obere genau anschließende, cylinderförmige Stück des hölzernen Stativs einschieben. Vermittelst eines starken, durch den messingenen und hölzernen Cylinder, die in der Richtung ihres Durchmessers durchbohrt sind, durchzusteckenden messingenen Stiftes k lassen sich beide so genau zusammenverbinden, daß keine Bewegung oder Wackeln des Meßtisches auf dem hölzernen Cylinder des Stativs möglich ist.

Das Stativ ist entweder nach der alten oder noch besser nach der neuern verbesserten Art, eingerichtet. Nach der alten sehr bekannten Art endigt sich der obere runde Fuß des Stativs in ein dreiseitiges prismatisches Stück, an dessen drei Seiten durch metallene Schrauben und Schraubenmuttern, senkrecht auf die Achse des Fußes, drei lange hölzerne Füße angeschraubt und nach Belieben befestigt werden können; diese Füße bewegen sich nahe parallel mit der Achse. Gegen diese Construction des Stativs läßt sich sagen, daß sie dem Meßtisch eben nicht den festesten Stand gewähre, daß bei

einem mäßigen Druck von oben herab der Tisch wegen des Standes und der Elasticität der Füße (sie müßten denn unmäßig dick und massiv seyn) eine kleine Horizontalbewegung um die Achse des Fußes bekommen könne. Ist indessen ein solcher Druck nicht stark, und sind die drei hölzernen, nicht allzu dünnen, Füße nur weit genug aus einander und fest genug in den Boden des aufzunehmenden Terrains eingesetzt, so ist nach meiner Erfahrung von dieser Achsendrehung sehr wenig oder gar nichts zu besorgen.

Aus dieser kurzen Beschreibung, welcher, wie jeder Beschreibung eines etwas zusammengesetzten Werkzeuges, die eigne Phantasie des Lesers nothwendig mit zu Hülfe kommen muß, ersieht man, daß die Stellung des Meßtisches von dreierlei Bewegungen des ganzen Apparates abhänge, nehmlich von der Bewegung der Füße vom Stativ, von der Bewegung des Cylinders c durch die Nuß in ihrer Hülse, endlich von der Achsendrehung des Cylinders b und des damit in Eins verbundenen Tisches um den Cylinder c, wenn die Schraube d gelüftet wird.

In der beschriebenen Weise habe ich mir selbst einen Meßtisch von etwas starker dauerhafter Bauart anfertigen lassen, und gegen 24 Rthlr. dafür bezahlt. Er ist, mit einiger Uebung, zu genauen Detailaufnahmen ungemein brauchbar. Einen, diesem ganz ähnlichen, nur in einigen wenig wesentlichen Stücken abweichenden, Meßtisch hat schon der verdienstvolle Geometer Mayer in seinem Werke: Unterricht zur practischen Geometrie im 1sten Theile §. 108. beschrieben. Nach Mayer's Angabe ist vieles von Holz, was bei meinem Tisch der Festigkeit halber von Messing ist, z. B. der Ring und seine Füße n, so wie auch die Stellschrauben h, u. s. w. Ein Jeder, der sich einen Meßtisch der Art will machen lassen, muß

hierin seiner Einsicht und seinen ökonomischen Rücksichten folgen.

Der feste horizontale Stand des Meßtisches a wird, nachdem dies durch schickliche Bewegung des Stativs und des Cylinders c mit seiner Nuß schon vorläufig annähernd geschehen, zuletzt durch feine Bewegungen der Stellschrauben h erlangt. Der wahre horizontale Stand der obern genauen Ebene des Tischblattes wird geprüft durch eine kleine am besten dosenförmige Libelle (Wasserwaage); von der Libelle wird weiterhin das Nöthige gelehrt.

Der Meßtisch, von dem hier die Rede ist, hat eine sehr gute Vorrichtung zum Horizontalstellen des Tischblattes und zur Drehung desselben um eine Vertikalachse. Hingegen fehlen ihm die von Marinoni und Brander gegebenen Vorrichtungen, um einen Punkt oder eine Linie auf dem Meßtisch über einen gleichnamigen Punkt oder eine gleichnamige Linie auf dem Felde zu orientiren. Auch geht ihm eine gute Eigenschaft des Meßtisches, mit Schraube ohne Ende, ab, welchen ich nach diesem beschreibe. Hat nehmlich der Meßtisch a einen festen horizontalen Stand bekommen, und soll er nun so, ohne diese horizontale Lage zu verändern, um seine vertikale Mittelpunktsachse gedreht werden, so muß man die Stellschrauben h, welche ihn festhalten, zurückdrehen, die Schraube d lüften, und nun den Tisch mit seinem Cylinder b um den Cylinder c herumdrehen; da aber bei dieser Drehung der Cylinder c eine kleine Seitenbewegung nach unten machen kann, wenn seine Nuß sich in ihrer Hülse, obgleich nur schwer, drehen läßt; so kann bei jener Azimuthalbewegung der Meßtisch etwas von seiner horizontalen Lage verlieren, welches durch die Libelle angezeigt wird; man muß in diesem Falle nach geschehener Azimuthalbewegung den Fehler im horizontalen Stande, welcher

bei gehöriger Vorsicht insgemein nur gering ist, vermittelst der Stellschrauben verbessern.

B) Meßtisch mit Schraube ohne Ende, ohne Stellschrauben. (Fig. 22.)

a ist ein quadratförmiges Meßtischblatt von 18 bis 24 Zoll ins Gevierte; an seine untere Fläche ist durch versenkte Schrauben eine etwas dicke messingene Platte b befestigt; an diese kann eine andre messingene Platte c genau angelegt und durch Schrauben d befestigt werden; doch kann man den Meßtisch auch, wenn man nicht damit operirt, von der Scheibe c abnehmen.

Mit dieser Platte c ist in Eins verbunden ein messingener Cylinder z, der sich unten in eine gezahnte starke Scheibe r endet. Die oben ebene Scheibe m und der starke, inwendig hohle Cylinder N bilden ein zweites zusammenhängendes Stück von Messing; die gezahnte Scheibe r ist mit ihrer Achse p, welche durch m hindurch in den hohlen Cylinder N geht, und hier durch eine Gegenschraube g angezogen wird, auf der Ebene des Stückes m beweglich, und zwar müssen beide Ebenen von r und m vermöge der untern Gegenschraube g genau an einander liegen bleiben, wenn der Meßtisch um die sehr genau einschließende Achse (Hülse) p gedreht wird.

s ist eine sogenannte Schraube ohne Ende, welche durch einen besondern Schlüssel umgedreht werden kann. Durch eine andre Schraube k kann die Schraube ohne Ende s so weit vorgerückt werden, daß sie in die gezahnte Scheibe r eingreift; durch das Zurückdrehen der Schraube k kann aber auch die Schraube ohne Ende von der gezahnten Scheibe so weit entfernt werden, daß beide nicht mehr in

einander eingreifen. Im letztern Falle kann, wie man leicht erkennt, der Meßtisch um die Achse der Hülse p schnell, doch sanft, bewegt werden; greift aber die Schraube s in die gezahnte Scheibe r ein, so geschieht die Achsendrehung (Azimuthalbewegung) des Meßtisches nur vermittelst der Umdrehung der Schraube ohne Ende, und zwar ist diese Bewegung sehr langsam, wie bei andern Mikrometerbewegungen durch Schrauben. Man kann demnach den horizontal gestellten Meßtisch erst durch eine grobe oder schnelle und zuletzt durch eine langsame feine Bewegung nach einer bestimmten Azimuthallinie orientiren. Ist das Instrument geometrisch genau gearbeitet, welches besonders von den genau zusammenliegenden Ebenen der Stücke r und m und der gut schließenden Achse p gilt, und steht der Cylinder N mit den damit verbundenen Theilen fest auf seinen Füßen; so muß bei der Umdrehung des horizontal gestellten Tisches a um seine Achse p durchaus keine Veränderung in der horizontalen Lage desselben mit einer gewöhlichen guten Dosenlibelle zu bemerken seyn. Mit einer sehr empfindlichen langen Röhrenlibelle, welche Neigungen gegen den Horizont bis auf einige Sekunden anzeigt, möchte dieser Meßtisch indessen wohl die Prüfung nicht bestehen. Durch die Schraube k kann man die Schraube ohne Ende so stark gegen die gezahnte Scheibe r andrücken, daß der Meßtisch eine feste Stellung behält, nehmlich nicht durch die äußern Bewegungen beim Aufnehmen um seine Achse p gedreht werden kann.

An den Cylinder N sind drei messingene flügelförmige starke Charniere (Backen) f befestigt, und an diese können durch Schrauben und Schraubmuttern drei hölzerne Füße so angesetzt werden, daß sich dieselben von und nach der Achse, oder wie man auch sagen kann, in der Ebene der Achse vom Cylinder N bewegen lassen. Diese

neuere Einrichtung des Stativs ist sicherlich besser, als die ältere, bei welcher sich die Füße nicht in der Ebene der Cylinderachse, sondern in einer außerhalb liegenden zu dieser nahe parallelen Ebene bewegen, wie beim Meßtisch A) bemerkt worden. Diese neuere Construction des Stativs verschafft dem Meßtisch einen festern Stand als die ältere; auch ist hier keine Achsendrehung desselben bei einem mäßigen Druck von oben so leicht zu besorgen.

Der hier beschriebene Meßtisch hat, wie man sieht, eine sehr gute Vorrichtung zur Azimuthalbewegung des horizontal gestellten Meßtisches, und übertrifft darin den vorher angezeigten Meßtisch A).

Dagegen geht ihm aber eine andre gute Vorrichtung dieses letztern, nehmlich die zum genauen Horizontalstellen, ab. Man kann nehmlich den Meßtisch B) bloß durch Verrückung seiner Füße horizontal stellen, welches seine Schwierigkeiten hat, und ebenfalls Uebung verlangt. Nach vergleichenden Versuchen mit beiderlei Meßtischen A) und B) kann ich indessen versichern, daß die zweite Art B) zum praktischen Gebrauch der erstern A) in Ganzem vorzuziehen ist. Ich habe mir auch einen Meßtisch nach dieser Bauart anfertigen lassen, und dafür 26 Rthlr. bezahlt, also nur 2 Rthlr. mehr, als für den Meßtisch A). So viel mehr ist eine Verbesserung schon werth, und ich rathe meinen Lesern, die eines Meßtisches einmahl benöthigt seyn sollten, ihre Wahl lieber auf das Bessere fallen zu lassen.

Die Structur dieses Meßtisches B) ist übrigens, wesentlich betrachtet, durchaus nicht neu, wie mehrere Unkundige dafür halten; denn die Schraube ohne Ende gebrauchte schon der geschickte Brander, und die Horizontalstellung durch Verrückung der Füße geschah schon durch Marinoni u.a.m. Der Lehmannische, wie er jetzt von Vielen, auch hier zu Lande, benannt wird,

kann also der letztbeschriebene Meßtisch B) nur in so fern heißen, als der sonst verdienstvolle, im Aufnehmen und Entwerfen der Situationspläne sehr ausgezeichnete Lehmann, diese Art des Meßtisches selbst immer gebraucht, beim Publikum in vorzügliche Achtung und Aufnahme gebracht, und seine Anwendung bei militärischen und topographischen Vermessungen nachdrücklich und belehrend durch That und Schrift empfohlen hat. Man sehe

Die Lehre der Situations-Zeichnung ꝛc. von Lehmann, königl. Sächs. Major, Plankammer-Director ꝛc., in 2 kleinen Theilen, in 4. Mit 17 großen Kupfertafeln. Dresden. (Der zweite Theil handelt insbesondere vom zweckmäßigen Gebrauch des Meßtisches; mit originellen guten Ideen des Verfassers. — Das Werk wird durch die Kupfer zu sehr vertheuert.)

So wie bei vollkommeneren Kreisinstrumenten, die zu sehr genauen Winkelmessungen dienen, noch ein besonderes Versicherungsfernrohr angebracht ist, so versehe ich auch meine Meßtische mit zwei kleinen Versicherungsdioptern, um während der Operation, dem Ziehen der Visirlinien ꝛc. mich von Zeit zu Zeit vom unverrückten Stand des Meßtisches zu überzeugen, worauf so viel ankommt. Ein solches Versicherungsdiopter v (Fig. 22.) besteht aus einem rechtwinklicht viereckigem Stückchen Messingblech, etwa $\frac{3}{4}$ Zoll hoch und etwas weniger breit, in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten; zwei Pferdehaare, auf gewöhnliche Weise eingespannt, durchkreuzen einander rechtwinklicht im Mittelpunkt des runden Ausschnitts. Zwei solche Dioptern sind an den entgegengesetzten Enden eines Seitenrandes der untern Tischfläche senkrecht und parallel zu einander, angeschraubt. Hat nun der Meßtisch einen gewissen Stand erhalten, so visirt man in der Richtung

der Kreuzdurchschnitte der Haare nach irgend einem wirklich vorhandenen Object oder deshalb ausgestecktem Signal. Bleibt während der Arbeit auf dem Papier der obern Tischfläche diese Visirlinie nach dem angenommenen Zielpunkt unverändert, so ist man von dem unverrückten Stand des Tisches versichert u. s. w.

§. 57.

Dioptерlineal. (Visirlineal.)

A) Mit gemeinen Dioptern.

Die Einrichtung des gewöhnlichen Diopterlineals ist selbst jedem Anfänger bekannt. Das Lineal von Messing muß sehr genau gearbeitet und kann 15 bis 18 Zoll lang seyn; die an beiden Enden desselben durch Charniere auf und nieder beweglichen Dioptern müssen so gearbeitet und gestellt seyn, daß die Absehelinie (Visirlinie) durch die beiden Dioptern an allen Stellen in einer auf die Schärfe des Lineals, nach welcher die Visirlinien gezogen werden, senkrechten Ebene liegen, oder daß eine Ebene, durch die Spalte des einen Diopters und den Faden (Haar) des gegenüberstehenden Diopters gelegt, mit der auf das Lineal senkrechten, durch die Schärfe derselben gelegten, Ebene genau zusammenfällt. Die Construction, nach welcher die Ebene durch beide Diopter verlängert, durch die Mitte des Lineals geht, muß in jedem Betracht verworfen werden *), weil man hier beim Ziehen der Linien längs dem Rande

*) Bugge in seiner Anleitung zum Feldmessen nimmt sie als zulässig an, indem sie nur geringe Fehler in den Winkeln veranlasse.

des Lineals nicht die wahren auf den Horizont projicirten Sehelinien (Collimationslinien) erhält. Auf die obere Fläche des langen Lineals können noch ein oder zwei verschiedene verjüngte Maßstäbe eingestochen seyn. Lehmann hat sein Diopterlineal so eingerichtet, daß das eine Diopter auch auf die halbe Entfernung vom andern durch Aufschrauben gestellt werden kann, und auf dem Objectivdiopter mit dem halben Abstande ein tausendtheiliger Maßstab und ein Tangentenmaß bis 45° der Erhöhungswinkel sich eingeschnitten befindet, an welchem ein horizontaler Schieber auf und nieder geschoben werden kann. Man kann diese Einrichtung entbehren. Die beste Prüfung des senkrechten Standes der Diopterebene auf die Ebene des Lineals, worauf so sehr viel ankommt, besteht auf jeden Fall darin, daß man auf einen genau horizontal gestellten Meßtisch das Diopterlineal aufsetzt, und die Diopterebene nun gegen eine senkrechte Linie, welche man durch den straffen Faden eines aufgehängten Pendels vorstellen kann, richtet; geht nun die Ebene genau durch die senkrechte Linie des Pendelfadens, so ist das Lineal brauchbar, im entgegengesetzten Falle muß es von einem geschickten Mechanikus berichtigt werden; man muß sich hier auch nicht die geringsten bemerkbaren Fehler gestatten wollen.

Dieses gemeine Diopterlineal ist nur auf kleinere Distanzen für scharf- und weitsichtige Augen brauchbar. Für größere Entfernungen muß dasselbe statt der gewöhnlichen Dioptern ein Fernrohr haben.

B) Diopterlineal mit Fernrohr.

Hier ist in der Mitte des messingnen Lineals eine kleine messingene Säule errichtet, welche ein gutes achromatisches Fernrohr trägt, das, nach Art einer Kippregel bei Winkelmessern, in einer auf die Fläche des Li-

neals senkrechten Ebene auf und niederbewegt werden kann. Das Fernrohr kann gegen 9 bis 12 Zoll lang seyn; durch dasselbe erhält man nicht bloß Vergrößerung sondern auch größere Deutlichkeit entfernter Objecte. Zwischen dem Ocular- und Objectiv-Glas sind im Brennpunkt (Focus) des Augenglases zwei zarte Fäden ausgespannt, die sich in der Sehachse des Fernrohrs rechtwinklicht durchkreuzen (Fadenkreuz). Die Sehachse, welche beim Visiren nach einem entfernten Object mit der Visirlinie (Collimationslinie) zusammenfällt, muß mit dem Rande des Lineals, längs dem die auf den Horizont projicirten Sehstrahlen gezogen werden, in eine auf das Lineal vertikale Ebene zusammenfallen; weil sonst, wenn die Vertikalebene dieser Achse etwa durch die Mitte des Lineals ginge, immer kleine Fehler und Correctionen der aufgetragenen Winkel unvermeidlich wären. Manche haben auch noch einen eigenen getheilten Halbkreis hierbei angebracht, um dessen Centrum sich das Fernrohr bei seiner Bewegung in der Vertikalebene dreht, damit beim Visiren nach Gegenständen, die über oder unter dem Horizont des Meßtisches liegen, neben der horizontalen (orthogonalen) Projection der Visirstrahlen zugleich mit mehr oder weniger Genauigkeit die Erhöhungs- und Tiefen-Winkel (Elevations- und Depressions-Winkel), welchen entfernte Objecte gegen den Standort des Beobachters machen, mit erhalten werden können. Ist ein solches Diopterlineal mit Kippregel von einem geschickten Optikus (denn ein gemeiner Mechanikus kann dergleichen nicht vollkommen darstellen) sehr genau ausgeführt, so hat es für die Detailaufnahmen und kleinere Triangulirung einen sehr großen Werth. Mayer in seiner practischen Geometrie sagt, daß man, um die Kosten zu mäßigen, die Röhren des Fernrohrs von Holz könne machen lassen. Ich rathe jedoch nicht dazu, weil sich Holz leicht wirft,

und dadurch Fehler entstehen. Wer wollte nicht gern ein paar Thaler mehr für das Vollkommenere ausgeben, wenn es ein sehr wichtiges geometrisches Werkzeug gilt.

§. 58.

Declinatorium oder Orientirbouſſole.

Damit wird hier nicht die größere Bouſſole mit Alhidade und Dioptern gemeint, mit welcher in der niedern Feldmeßkunst Winkel im Felde gemessen werden, sondern eine kleinere Vorrichtung, bloß dazu dienend, die Richtung einer Linie auf dem Felde gegen die magnetische und dadurch auch gegen die wahre Mittagslinie nur annähernd zu bestimmen, so wie dazu, um bei kleinern Aufnahmen den Meßtisch gegen Linien im Felde gehörig zu orientiren, wie wir weiterhin sehen werden. Fast alle neuern Schriftsteller der Vermessungskunde eifern gegen den Gebrauch der Bouſſole, als eines höchst unvollkommenen Hülfsmittels. Meine Meinung ist dies auch, wenn es die Winkelmessung durch die Bouſſole gilt; allein zur annähernd richtigen Orientirung des Meßtisches und der darauf gezogenen Linien scheint mir die Magnetnadel dennoch ein sehr nützliches physikalisches Werkzeug.

Die kleine Orientirbouſſole (Declinatorium), welche in der erwähnten Absicht mit dem Meßtisch in Verbindung gesetzt werden kann, ist ihrer Form und Einrichtung nach sehr bekannt. Das Kästchen, in welchem eine gut gearbeitete etwa 4 bis 5 Zoll lange Magnetnadel mit seinem Agathütchen, auf einer scharfen Stahlspitze, sich leicht und frei bewegen kann, pflegt die Form eines länglichten Rectangels, etwa 6 Zoll lang und 4 Zoll breit, zu haben. Die Richtung der Ma-

gnetnagel, magnetische Meridian, ist auf dem Boden des Kästchens, durch den Mittelpunkt des Stiftes gezogen und an beiden Enden mit Nord — Süd bezeichnet. Es ist gut, wenn die beiden langen Seitenränder des Kästchens mit dieser Linie Nord — Süd sehr genau parallel gehen, damit man an ihnen auf dem Meßtisch die Richtungslinien, die das Declinatorium anzeigt, ziehen kann. Auch können durch die Punkte Nord und Süd zwei in Grade und halbe Grade getheilte Kreisbogen laufen, um in gewissen Fällen die Neigung einer Linie auf dem Felde gegen den magnetischen Meridian in Graden zu erhalten; außer der Linie des magnetischen Meridians ist auch wohl noch eine zweite gezogen, die den wahren astronomischen Meridian annähernd vorstellt; denn auf eine völlige Genauigkeit darf man bei einem so unvollkommenen Instrumint nicht rechnen. Zur Ziehung des wahren Meridians in der Orientirboussole muß man wissen, um wie viel Grade an einem bestimmten Orte die Magnetnadel mit ihren Polen von den wahren Polen abweicht. Diese Abweichung (Declination) ist selbst etwas veränderlich; durch nahe liegendes Eisen wird übrigens die Richtung der Nadel gestört, daher auch zum Kästchen ganz reines eisenfreies Messing gebraucht, und beim Gebrauch die Nähe von größern und kleinern Eisenmassen vermieden werden muß. Wegen dieser Veränderlichkeit und Unsicherheit in der Richtung der Magnetnadel bleibt dieselbe gewiß immer eines der unvollkommensten Werkzeuge der niedern Vermessung.

§. 59.

Dioptrerkreuz (l'Equerre d'Arpenteur.) (Engl. Surveying cross.)

Dieses sehr einfache Werkzeug wird gegenwärtig

nur noch von Feldmessern gebraucht, zum Abstecken von rechten Winkeln und Senkrechten im Felde, zu Aufnahmen von sehr geringem Umfange. Man denke sich zwei gerade Linien, die einander genau senkrecht durchschneiden, als Alhidaden zweier Lineale, an beiden Enden jeder Alhidade zwei Dioptern, wie sie sich an gewöhnlichen Diopterlinealen finden, so angebracht, daß die Diopternebenen und die Alhidaden zusammenfallen, so hat man einen hinlänglichen Begriff vom Feldmesserkreuz. Sein Stativ ist gewöhnlich ein einfacher starker Fuß, unten mit einer eisernen Spitze versehen, zum Einstecken in den Boden.

Um sich von der rechtwinklichten Stellung der senkrechten Diopternebenen zu versichern, visirt man durch zwei gegenüberstehende Dioptern nach einem entfernten Gegenstand und bei unveränderter Stellung des Kreuzes nach einem andern wirklich vorhandenen Object oder ausgesteckten Signal; dann dreht man horizontal das Kreuz so weit herum, daß man durch das zweite Dioptrnpaar den ersten Gegenstand sieht, erscheint nun in dieser Stellung auch das zweite Object (Signal) in der Visirlinie des ersten Diopternpaars, so sind die vier Dioptern in der richtigen Lage gegen einander.

Kein gewöhnlich gebräuchliches Diopterkreuz läßt sich rectificiren; es wäre aber ein Leichtes, es dazu einzurichten. Insgemein wird das Kreuz zu kleinen Nebenmessungen, zur Bestimmung krummliniger Grenzlinien durch eine Abscissenlinie und senkrechte Ordinaten gebraucht.

Das Abstecken rechter Winkel und senkrechter Linien auf eine bestimmte Abscissenlinie könnte man auch mit dem Meßtisch und dem Diopterlineal bewerkstelligen, so wie durch Winkelmesser mit Spiegeln, wovon weiter unten gehandelt wird. Ein besondres Spiegelinstrument zu dieser Absicht, vorzüglicher als das ge-

meine Feldmesserkreuz, aber auch kostbarer, hat der ältere Adams in London angegeben; es ist in Adams (des jüngern) Schrift: Geometr. und graphische Versuche, übersetzt von Geißler ꝛc. S. 237 beschrieben. Dieses von Adams unter dem Namen optical square (optischer Winkel) angegebene Instrument läßt sich entbehren, wenn man ein andres Spiegelinstrument, einen Sextanten oder einen reflectirenden Halbkreis hat. Noch andere keine Werkzeuge zu der obenerwähnten Absicht bedürfen hier keiner Erwähnung.

Winkelmesser mit eingetheilten Vollkreisen oder Bogentheilen desselben.

§. 60.

Verschiedene Arten der Gradeintheilung.

Die Theilung der ganzen Kreisperipherie in 360 Theile oder Grade ist uralt, und man weis nicht, wer sie zuerst eingeführt hat. Man theilte in den ältesten Zeiten das Jahr in 360 Tage und die Sonnenbahn in 360 Theile, daher wahrscheinlich die Theilung des Kreises in 360 Grade. Die Theilung des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Sekunden u. s. w. ist bekannt. Man nennt daher diese Kreistheilung die Sexagesimal-Theilung; sie ist bis auf den heutigen Tag noch die fast allgemein gebräuchliche, und die Eintheilung unserer Winkelmesser derselben gemäß.

Außer dieser uralten Gradeintheilung des Kreises, die in allen cultivirten Ländern, Frankreich ausgenommen, bis jetzt in Ehren gehalten und beibehalten worden, ist noch zu bemerken.

a) Die Eintheilung des Kreisquadranten in 96 Grade, also die des Vollkreises in 384 Grade, welche man an manchen astronomischen Winkelmessern, z. B. den Mauerquadranten, zugleich neben der gewöhnlichen alten Theilung findet; beiderlei Theilungen an zwei concentrischen Kreisen sind hier sehr nützlich zur gegenseitigen Prüfung, ingleichen zu genauerer Winkelbestimmung. Die Reduction eines gemessenen Winkels nach einer Theilungsart auf einen Winkel nach der zweiten Theilungsart, dem Verhältniß 96 : 90 gemäß, hat keine Schwierigkeit. Der Grund zu dieser 96 Theilung ist dieser: der Quadrant läßt sich mittelst des Kreishalbmessers in 3 Theile, und durch 5 fortgesetzte Halbirungen in 96 Theile geometrisch theilen; die 90 Theilung hingegen kann nicht ganz geometrisch, sondern muß zum Theil versuchsweise ausgeführt werden.

b) Die Eintheilung des Quadranten in 100 Grade, also die des Vollkreises in 400 Grade, welche in Frankreich, dem in den Zeiten der Revolution von den dortigen Mathematikern vorgeschlagenen und durchgesetzten Decimalsystem zu Folge, jetzt im Gebrauch ist. Ein Grad ist nach diesem System gleich 100 Minuten, eine Minute gleich 100 Sekunden u. s. w. Diese Eintheilung des Kreises heißt die Centesimaltheilung. Ein Deutscher Mathematiker muß sie kennen, wenn er die neuern zum Theil ganz vortrefflichen Werke der französischen Mathematiker, z. B. eines Laplace u. a. m. verstehen will. Die Reduction der nach dem Centesimalsystem angegebenen Winkel auf Winkel nach dem alten Sexagesimalsystem ist leichter, als es Anfängern scheinen mag. Solchen will ich hier einen bequemen Gang dieser Reduction anzeigen: . . . .

Der Quadrant ist

= 100 degrés nach der Centesimaltheilung
= 90 Grad » » alten Theilung.

Also sind 100 degrés = 90 Grad, also 1 degré = $\frac{9}{10}$ Grad.

Subtrahirt man also von der Zahl der degrés $\frac{1}{10}$, welches leicht geschieht, so erhält man die entsprechende Zahl der Grade nach der alten Abtheilung in ganzen Graden, oder in ganzen Graden mit einem angehängten Decimalbruch, der nun weiter in Minuten und Sekunden durch ein fortgesetztes Multipliciren mit 60 verwandelt wird. Folgendes Beispiel wird diese Operation deutlich machen:

Gesetzt, es sollen $101{,}6695^0 = 101^0 66' 95''$ nach dem Centesimalsystem in Grade, Minuten u. s. w. nach dem alten Sexagesimalsystem verwandelt (reducirt) werden, so ist:

$101^0 66' 95'' = 101{,}6695^0$
subtr. $\frac{1}{10} = -10{,}16695$

Also $91{,}50255^0$ Grad $= 101^0 66' 95''$ degrés.

Ferner ist der Decimalbruch 0,50255 Gr. $= \frac{50255}{100000}$ Gr.

$$= \frac{50255 \cdot 60}{100000} \text{ Min.} = 30{,}153 \text{ Min.}$$

Also sind
$101^0 66' 95''$ n. d. Cent. Th. $= 91^0 30{,}153'$ n. d. Sex. Th.

Sodann ist der Decimalbruch $0{,}153' = \frac{153}{1000} = \frac{153 \cdot 60''}{1000}$

$$= 9{,}18''.$$

Der Decimalbruch $0{,}18'' = \frac{18}{100}'' = \frac{18 \cdot 60'''}{100}$

$$= 9{,}18''.$$

Daher sind $101{,}6695^0$ oder $101^0 66' 95''$ n. d. Cent. Th.
$= 91^0 30' 9'' 10{,}8'''$ n. d. Sex. Th.

Diese Reduction von der Französischen Centesimal-

theilung auf unsere alte Sexagesimaltheilung besteht also, wie man sieht, kürzlich darin, daß man von der Zahl der degrés centes. erst $\frac{1}{10}$ subtrahirt, sodann den restirenden Decimalbruch mit 60 multiplicirt, um die Minuten unsrer Theilung zu erhalten u. s. w.

Der umgekehrte Act, nehmlich die Reduction von der Sexagesimaltheilung auf die Centesimaltheilung ergiebt sich hieraus ohne eine besondre Erklärung, z. B. nach der Sex. Th. ist $38^0 42' = 38,7^0$, wenn man $42'$ mit 60 dividirt

Addirt man von $38,7^0$ $\frac{1}{9} = + 4,3^0$

so ist $38^0 42'$ Sex. Th. $= 43,00^0 = 43^0$ (degrés) Cent. Th.

§. 61.

Einiges über die verschiedenen Construktionen der Winkelmesser.

Jeder Winkel, der zwei entfernte Objecte mit dem Ort (Auge) des Beobachters bilden, es sey ein Horizontalwinkel, ein schiefgeneigter oder ein Höhenwinkel, ist anzusehen, wie ein Centriwinkel in einem Kreise von einem beliebigen Halbmesser oder Durchmesser; der Mittelpunkt des Kreises stellt den Scheitel des Winkels am Ort der Beobachtung (Station) vor, die Halbmesser aber, die den Centriwinkel einschließen, bezeichnen die Sehestrahlen vom Auge des Beobachters nach den entfernten Objecten. Denkt man sich daher einen Vollkreis oder Halbkreis ꝛc. mit der gewöhnlichen Gradeintheilung, und um den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises die Alhidade eines Diopternlineals oder Fernrohrs, als Durchmesser, beweglich, so hat man einen Begriff von den wesentlichen Eigenschaften eines Winkelmessers. Der Kreisbogen desselben muß nehmlich

vollkommen eben und geometrisch genau getheilt seyn; die Alhidade, welche den Visirstrahlen entspricht (Siehe Diopterlineal) muß sich genau um den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises bewegen, oder der Kreis mit seiner Alhidade darf nicht excentrisch seyn; der Winkelmesser muß nach den verschiedenen Zwecken, wozu er angewendet wird, in eine horizontale oder vertikale oder schiefgeneigte feste Lage gebracht werden können. Dies ist die Theorie, auf welche sich die Construction aller Winkelmesser, selbst des einfachsten, gründet. So einfach aber auch diese Theorie scheint, so schwer hält es, ihr in der wirklichen Ausübung, in Anfertigung mathematischer Instrumente, ganz getreu zu bleiben. Zeuge dessen ist der gewisse Umstand, daß unter zehn Winkelmessern, selbst von sehr geschickten Künstlern, die Englischen nicht ausgenommen, angefertigt, kaum einer gefunden wird, der die erwähnten geometrischen Forderungen durchaus befriedigt, und auch bei der strengsten Prüfung sich ganz fehlerfrei und ohne Tadel zeigt. Alle drei Bedingungen zusammen, nehmlich: daß der Kreisbogen zu einer vollkommenen Ebene gehöre, genau centrirt und getheilt sey, sind schwer zu erfüllen; insbesondere aber ist die genaue Theilung mit Schwierigkeiten verknüpft, deren Bekämpfung in den neuern Zeiten das Nachdenken und den Fleiß sehr genialer, denkender Gelehrter und Künstler viel beschäftigt hat. Ausgezeichnetes Verdienst haben sich um die richtige Theilung geodätischer und astronomischer Instrumente die Engländer Bird, Graham und Ramsden, letzterer namentlich durch die Einrichtung einer sehr sinnreichen Theilmaschine, erworben. Dem Beispiel und den Vorschriften dieser großen Männer sind in der Folge bis auf diese Stunde alle Künstler gefolgt, welche etwas Vorzügliches zu leisten sich beeiferten.

Zur Rubrik des Vorzüglichen können in unserm

Zeitalter, wo die Vermessungskunde und die mathematische Mechanik einen so hohen Grad von Vollkommenheit erreicht haben, nur noch solche Werkzeuge gehören, welche die Winkel bis auf minutissima eines Grades, nehmlich bis auf Minuten oder selbst auf einzelne Sekunden zuverläßig angeben. Da solche Winkelmesser mit einem oder auch mit mehreren Nonien (Verniers) versehen sind, so muß ihre Theilung äußerst genau seyn; denn auch die kleinsten Fehler hierin werden vermittelst der Nonien sogleich entdeckt. Anders verhält es sich aber mit solchen Winkelmessern, die die Winkel nur bis auf halbe oder Viertel-Grade geben, keine Nonien haben, und also geringe Fehler haben können, die nicht in die Augen fallen, und auch beim Gebrauch zu gemeinen Feldmessungen keinen beträchtlichen Nachtheil bringen; dieß ist der Fall mit allen Astrolabien ohne Nonien nach älterer Bauart und mit den gewöhnlichen Boussolen. Bei allen ältern Astrolabien, die ich zu sehen und zu prüfen Gelegenheit hatte, ist der Nonius am Index von den Anfertigern weislich vermieden, ja die Fehler der Theilung an diesen schlecht bestellten Instrumenten sind zum Theil so grob, daß man sie mit einem feinen Stangenzirkel oder wohl gar mit bloßen Augen entdecken kann. Auch noch jetzt scheuen sich solche Mechaniker, welche keine wissenschaftliche Bildung, und keinen vollkommenen Theilapparat, sondern nur gewöhnliche Theilscheiben besitzen, vor den Nonien, und suchen daher die gemeinen Winkelmesser: Boussolen und Astrolabien nach alter Art in Ansehn zu erhalten, oder wenn sie Nonien anbringen, so richten sie die Theilung des Limbus und die correspondirende des Nonius so ein, daß man dadurch die zu messenden Winkel mit weniger Genauigkeit, etwa nur bis auf 5 oder höchstens 2 Minuten erhält, oftmahls selbst dies nur erträglich.

An die Stelle der ältern unvollkommenen Astrolabien mit gemeinen oder Fernrohrdioptern, gewöhnlich nur aus einem eingetheilten Halbkreis bestehend, wodurch ebenfalls die Fehler der Theilung versteckt und bemäntelt werden, sind in den neuern Zeiten die viel vorzüglichern Theodoliten oder Scheibeninstrumente getreten, deren Beschreibung weiter unten folgt.

Die Theodoliten (der Name ist sonderbar und nicht gut etymologisch zu erklären) wurden zuerst in England unter dieser Benennung eingeführt, und waren anfänglich nichts anders als kreisförmige Astrolabien mit Dioptern, aufgerichtet auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte zweier über einander fortlaufender Kreise.

Um das Instrument vermeintlich weiter zu vervollkommnen, setzte man auf die mittlere Scheibe sehr bald noch eine Boussole; so entstand das Instrument, dessen man sich in England noch jetzt zuweilen unter dem Namen, Theodolit mit Dioptern, bedient, und welches auch in Berlin von einigen Arbeitern angefertigt worden ist.

Die erste Vervollkommnung des Instruments rührt wahrscheinlich von Dollond und Adams, sehr genialen geistreichen Künstlern in London, her. Diese setzten auf den obern Kreis ein Fernrohr, welches sich in einer Vertikalebene auf und niederbewegen ließ, wodurch die Reduction der schiefgemessenen Winkel auf den Horizont entbehrlich gemacht wird. Zugleich brachten sie einen Halb- oder Viertel-Kreis an, um dessen Centrum sich das Fernrohr in der Vertikalebene bewegte, um dadurch die Vertikalwinkel (Höhen- oder Elevations-Winkel) zu erhalten.

Der berühmte Ramsden, von dem sich gleichsam eine neue Epoche der höhern mathematischen Mechanik datirt, verbesserte das Theodolit noch dadurch,

daß er das Fernrohr in sogenannte Y's *) (Engl. ausgespr. Ei's) legte, und ein Niveau (Libelle) damit verband, wodurch die Messung der Vertikalwinkel sich zu einer größern Genauigkeit erhob. Zugleich brachte er ein Versicherungsfernrohr (Siehe Versicherungsdiopter beim Meßtisch oben) unter dem Instrument an, wodurch man sich von der unverrückten Lage desselben während der Beobachtung überzeugen könnte. Solches ist ungefähr die Construction des Theodoliten, welcher zu der Roy'schen Vermessung in England gedient hat, und an welchem das obere Fernrohr ungefähr die Aufhängungsweise eines Passage-Instruments erhielt.

Eben diese Vermessung und deren Verbindung mit der französischen Gradmessung dienten aber auch dazu, den ausnehmenden Vortheil repetirender Instrumente, deren Construction eine Erfindung, eine fruchtreiche Idee des großen Deutschen Geometers, Tobias Mayer (des Vaters), war, ins Licht zu setzen. Nehmlich die zwölfzölligen Repetitionskreise, welche man in Frankreich anwandte, gewährten dieselbe Genauigkeit in der Winkelmessung, als das 3ozöllige Instrument von Ramsden, das noch dazu mit zusammengesetzten Mikroskopen einzelne Sekunden ablas.

Nun fing man allgemein an, sich der Repetitionskreise zu bedienen, und sie wurden von der Zeit an sowohl zu genauen geodätischen als auch astronomischen Operationen vorzugsweise angewendet. Herr v. Zach ist, glaube ich, der erste gewesen, der im Jahr 1805 an Englischen Theodoliten eine Einrichtung zum einfa-

*) Y bezeichnet einen Träger (Unterlage) von einer diesem Buchstaben ähnlichen Gestalt.

chen Repetiren der Winkel anbringen ließ, und diese kleinen nur 5zölligen Instrumente mit großem Vortheil zur Vermessung des Eichsfeldes anwandte.

Alle diese Theodoliten hatten indessen noch die große Unbequemlichkeit der gewöhnlichen, wenig festen, Stative mit leichten zusammenzulegenden Füßen, welche das ganz genaue Observiren der Winkel mit den Theodoliten gar sehr erschwerten. So viel mir bekannt ist, verwarf zuerst Reichenbach in München, dessen Werkstätte durch vorzüglich genaue mathematische Instrumente so berühmt geworden, jene Füße, und setzte das ganze Instrument auf einen kurzen metallnen Trépied (Dreifuß), wodurch bei Anwendung gehöriger UnterSätze der Kreis ganz außerordentlich an Festigkeit und Sicherheit gewann.

Reichenbach behielt das Versicherungsfernrohr und die Repetitions-Einrichtung, und legte zugleich, ungeachtet der kleinen Dimensionen, das obere Fernrohr in Pfannen nach Art eines Passage-Instruments, so daß diese kleinen Theodoliten fast ganz die Gestalt des ältern Ramsdenschen erhielten, mit dem einzigen aber höchst bedeutenden Zusatz der Repetition.

Diese Theodoliten von Reichenbach geben, bei 8 Zoll Durchmesser, die Winkel bis auf 10 Sek. unmittelbar mit 4 Nonien an, und ich habe keinen in Händen gehabt, der nicht bei der achten Repetition bereits die stehenden Sekunden angezeigt hätte.

Gegenwärtig werden diese Instrumente auch hier in Pistor's Werkstatt, nach derselben Construction und mit einer fast noch größern Genauigkeit der Theilung, wozu die Preußische Regierung durch bedeutende Unterstützung die Mittel gewährt hat, angefertigt. Ich glaube daher, daß wir hier zu Lande für geodätische sowohl als astronomische Instrumente jeder Art, des Auslandes und seiner Künstler fernerhin nicht mehr be-

dürfen werden, da auch die Preise dieses wahrhaft wissenschaftlich gebildeten (welches so selten der Fall ist) Künstlers überaus mäßiger sind, als bisher in die fremden Werkstätten dafür gezahlt werden mußte.

Ich kann übrigens nicht unbemerkt lassen, daß der Inhalt einer kleinen Schrift, die in Frankfurt a. M. unter dem Titel:

Beiträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen u. s. w. 1804.

herausgekommen ist, und einen Hrn. v. Tabor zum Verfasser hat, über die Construction der Repetitionskreise, wozu auch der sogenannte Bordasche Kreis gehört, viel Belehrendes enthält, welches zum großen Theil von den Münchener Künstlern benutzt und auch hier in Pistor's Werkstätte nicht unberücksichtigt geblieben ist.

Außer den hier im Allgemeinen angezeigten, noch näher zu beschreibenden Winkelmessern, mit welchen man directe nach den entfernten Objecten visirt, hat man noch eine andre Art derselben unter dem Namen Spiegelinstrumente, welche den einen Visirstrahl, nach einem von zwei entfernten Gegenständen, durch doppelte Reflexion zweier Planspiegel ins Auge senden. Besonders bekannt und brauchbar zu Winkelmessungen aus freier Hand ohne Anwendung eines Stativs ist der Hadleysche Spiegelsextant, nicht allein zu Messungen auf der See sondern auch auf dem festen Lande.

§. 62.

Geometrischer Begriff von der einfachen und doppelten Repetition einer Winkelmessung. (Fig. 23, 24, 25, 26.)

a) Einfache Repetition.

Die Kreise (Fig. 23, 24) mögen den eingetheilten Gradbogen eines Winkelmessers vorstellen, C das Centrum desselben, um welches er sich drehen läßt, o o eine Alhidade mit Fernrohr, die sich um das Centrum des Gradbogens bewegen und an jeder Stelle desselben feststellen läßt; u u sey ein sogenanntes Versicherungs- (Prüfungs-) Fernrohr unter dem Limbus, am Stativ des Winkelmessers angebracht. Wir wollen hier annehmen, die Theilung des Limbus gehe von der Linken zur Rechten.

A und B bedeuten zwei entfernte Objecte, C den Ort der Beobachtung und zugleich den Mittelpunkt des Winkelmessers. Man sucht den Sehewinkel A C B = x oder wie man auch wohl zu sagen pflegt, die Angulardistanz der Oerter A und B.

Dies geschieht also:

1) Das obere Fernrohr (Fig. 23) wird mit seinem Index auf den Anfangspunkt (Nullpunkt) der Kreistheilung gestellt, der Kreis mit seinem Centrum C senkrecht über dem Standort horizontal aufgerichtet, und in dieser Stellung so gedreht, daß das entfernte Object B in der Alhidadenlinie (Collimationslinie) o o des obern Fernrohrs erscheint. Hierbei wollen wir vorläufig annehmen, daß A, B in der Horizontalebene des Kreises liegen. Zugleich richtet man das untere Versiche-

rungs-Fernrohr uu auf einen entfernten scharfbegrenzten Gegenstand R.

2) In dieser Lage wird der Kreis vollkommen befestigt, und nun das obere Fernrohr so weit links herumgedreht, bis seine Alhidadenlinie mit der Visirlinie nach dem zweiten Object A zusammenfällt; sieht man nach dieser Operation durch das untere Versicherungsfernrohr nach den Gegenstand R, so ist man vom unverrückten Stand des Kreises versichert, welcher Umstand bei keiner Winkelmessung außer Acht gelassen werden darf. — Der Bogen oo', welchen der Index der obern Alhidade hierbei beschrieben hat, und den man in Graden ablesen kann, — es ist dies bei der Repetition der Winkel nicht durchaus nothwendig, aber zur Vergleichung gegen das Endresultat immer sehr nützlich, — bezeichnet nun, wie man sieht, das Maß des Winkels A C B = x. Dies ist die bekannte einfache Winkelmessung, welche man ähnlicherweise mit allen Winkelmessern bewerkstelligt.

3) Man dreht nun ferner den Kreis mit dem obern Fernrohr, das hierbei seine jetzige Lage o' o' gegen denselben nicht verändert, so daß der Index auf dem Punkte o' des Limbus unverändert stehen bleibt, horizontal von der Linken zur Rechten so weit herum, bis in der Visirlinie des Fernrohrs C o' (Fig. 24) jetzt zum zweitenmahl das Object B rechter Hand erscheint. In dieser Lage befestigt man den horizontal gestellten Kreis; in gleicher Absicht wie vorher bleibt das untere Versicherungs-Fernrohr uu auf den entfernten scharfbegrenzten Gegenstand R gerichtet.

4) Die obere Alhidade (Fernrohr) wird wieder herumgedreht, und auf das Object A linker Hand zum zweitenmahl gerichtet; nach dieser Operation

muß das untere Fernrohr noch auf R zeigen, wenn der Kreis bei der Drehung des obern Fernrohrs in unverrückter Lage geblieben ist. Der Bogen o′ o″, welchen der Index der obern Alhidade bei der 2ten Bewegung (Repetition) am Limbus des Kreises beschrieben hat, bezeichnet wiederum das Maß des Winkels ACB = x; folglich ist der Bogen oo″ = 2x. Wenn man also die Gradzahl des Bogens oo″, welchen der Index der obern Alhidade von seinem Anfangspunkt o bis zum Endpunkt o″ der zweiten Operation durchlaufen hat, durch 2 dividirt, so erhält man den einfachen Winkel x = ACB in Graden, Minuten u. s. w.

Auf ganz ähnliche Art und durch ähnliche Bewegungen des Kreises und seiner Alhidade mit Fernrohr kann man ferner, wie jeder Leser ohne weitere Erklärung einsehen wird, den dreifachen Bogen oo‴ = 3x überhaupt durch eine nfache Repetition der ersten Operation den nfachen Winkel ACB oder nx erhalten. Dividirt man nun den nach nRepetitionen erhaltenen Bogen oder Winkel nx durch die Zahl der Wiederholungen n, so bekommt man offenbar den einfachen Winkel x = ACB.

Hierbei müssen wir folgende Erinnerungen wahrnehmen:

Der Anfangspunkt o, von welchem der Index der obern Alhidade zuerst ausgeht, muß nicht nothwendig der Nullpunkt der Limbustheilung seyn; ist es ein anderer Punkt dieser Theilung, z. B. 5 Grad, so muß man dies am Ende in Rechnung bringen; stände nehmlich nach der nten Repetition der Index auf m Grad, so wäre der gesuchte Winkel $x = \frac{m - 5}{n}$ Grad ꝛc.

Es steigt ferner der Index der nten Repetition

selten genau auf einen Theilstrich des Limbus; in diesem Fall giebt der Nonius des Index den ganzen Bogen in Graden, Minuten oder auch Theilen einer Minute (Sekunden) sehr annähernd.“

Wird die Repetition der Winkelmessung oft erneuert, so kann es sich am Ende finden, daß der Index der Alhidade die ganze Peripherie des eingetheilten Kreises einmahl oder selbst mehrere Mahle durchlaufen hat, wozu noch ein Theil der Peripherie als Ueberschuß kommen kann. Allgemein, wenn wir die ganze Peripherie 360^0, die Zahl der Repetitionen n, die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Index die ganze Peripherie durchlaufen hat, w, und den überschüßigen Bogen m nennen, so ist zuletzt:

$$\angle ACB \text{ oder } x = \frac{w \cdot 360 + m}{n}$$

Z. B. wenn der Index zuerst vom Nullpunkt der Limbustheilung ausging, wie man dies gewöhnlich geschehen läßt, und nach 9 Repetitionen, nachdem er den ganzen Kreis zweimahl durchlaufen hat, auf $5^0\,17'\,30''$ zeigt, so ist der gesuchte Winkel

$$x = \frac{2 \cdot 360^0 + 5^0\,17'\,30''}{9} = 80^0\,35'\,16''\,40'''.$$

Dies Beispiel mag zeigen, auf wie kleine Theile des ganzen Kreisbogens man durch die Repetition der Messung einen gesuchten Winkel erhalten kann. Man begnügt sich indessen mit einem gewissen Grad der Genauigkeit (etwa bis auf 1 Sek. oder Zehntel einer Sekunde) und daher auch mit einer gewissen Anzahl der Wiederholungen (etwa 6 bis 10), welche in der Ausübung immer mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist. Wenn man nach einigen Repetitionen einen Winkel bis auf 1″ genau erhält, und sich dieser bei weiter fortgesetzter Wiederholung nicht mehr um 1″ verändert, so

pflegt man wohl zu sagen, der Winkel sey bis auf die stehende Sekunde (oder stehenden Sekunden) gefunden worden. Mit diesem Grad von Genauigkeit kann man bei den meisten auch sehr feinen geodätischen und astronomischen Operationen sich begnügen.

Ein Zeichen, daß man das Maß des Winkels richtig erhalten habe, wird es seyn, wenn man denselben auf die beschriebene Art noch einmahl mißt, und zwar so, daß der Index der obern Alhidade von einem andern Theilungspunkte des Kreises ausgeht, und nach dieser zweiten Messung derselbe Winkel auf die stehende Sekunde wieder wie vorher erhalten wird. Zeigt sich hierbei ein Unterschied von Theilchen einer Sekunde, so nimmt man von beiden Resultaten das arithmetische Mittel, wodurch man der Wahrheit am nächsten kommt. Hat der Winkelmesser 2 oder 4 Indices mit Nonien, so nimmt man zu noch größerer Sicherheit aus den Endangaben aller Nonien das arithmetische Mittel, und dividirt dasselbe durch die Anzahl der Repetitionen.

Bei der hier gegebenen Erklärung und den zugehörigen Figuren ist angenommen worden, daß die Theilung auf dem Limbus des Winkelmessers von der Linken zur Rechten gehe, welches bei den Repetitionskreisen, die auch zu Messungen der Vertikalwinkel oder Zenithdistanzen angewendet werden, gewöhnlich Statt findet. Wäre umgekehrt, wie an den gemeinen Winkelmessern, die Theilung von der Rechten zur Linken angeordnet, so würde die Repetition einer Winkelmessung auch nach dieser Richtung vorgenommen werden.

Die einfache Repetition auf Winkelmesser wirklich angewendet, ist eine sinnreiche, vorher noch nicht bekannte oder wenigstens noch nicht ausgeführte, Idee des berühmten Astronomen Tobias Mayer, welcher dieselbe in den Göttingischen Commentarien (Comment. Goett. Tom. II.) zuerst bekannt machte. Nach ihm

hat sich auch Borda in Frankreich durch eine besondre Construction der Winkelmesser mit Repetition verdient gemacht. Dieser gebraucht aber bei der Winkelmessung mit dem nach ihm benannten Multiplications-Kreise statt der einfachen Repetition, wovon eben gehandelt worden, die doppelte Repetition, welche mit der Mayerschen einfachen sehr nahe verwandt und daher nicht als eine neue Erfindung zu betrachten ist.

b) Doppelte Repetition. (Fig. 25 u. 26.)

Die Kreise (Fig. 25 und 26.) mögen wieder den eingetheilten Limbus eines Winkelmessers, C dessen Centrum, oo die Alhidade des obern Fernrohrs, uu die des untern Fernrohrs bezeichnen u. s. w. Das untere Fernrohr uu ist hier auch um den Kreis beweglich.

Es soll der Sehewinkel ACB gemessen werden. Dies geschieht also:

1) Der Index der obern Alhidade oo wird auf den Nullpunkt der Theilung gestellt, welches indessen nicht unumgänglich nöthig ist, und der Kreis so gedreht, daß das Object B rechter Hand in der Richtung (Collimationslinie) oo erscheint (Fig. 25.). In dieser Lage wird der Kreis befestigt.
2) Das untere Fernrohr wird so weit herumgedreht, daß das Object A links in der Richtung uu erscheint. Man ist vom unverrückten Stand des Kreises bei dieser Operation versichert, wenn dann das Object B rechts noch in der Richtung oo gesehen wird. Widrigenfalls muß man die nöthige Verbesserung anstellen, worauf bei dieser Art von Winkelmessung sehr viel ankommt. Der Bogen ou ist das Maß des Winkels x = ACB.
3) Hierauf dreht man den Kreis mit seinen Fernröhren, die hierbei ihre Lage gegen denselben nicht

verändern dürfen, so weit herum, bis das Object B rechts in der Richtung uu der untern Alhidade erscheint (Fig. 26.); dadurch wird die obere Alhidade um den Bogen ou = x zurückbewegt.

4) Nachdem der Kreis in dieser Lage befestigt worden, so wird die obere Alhidade aus der Lage oo in die Lage o″o″ herumgedreht, nehmlich so weit, daß das Object A links in der Visirlinie des obern Fernrohrs gesehen wird. Man ist vom unverrückten Stand des Kreises bei dieser Operation versichert, wenn dann das Object B rechts noch in der Visirlinie uu des untern Fernrohrs gesehen wird. Widrigenfalls muß man die nöthige Verbesserung machen. Der Bogen o o″, welchen die obere Alhidade bei diesem letzten Act beschrieben hat, ist offenbar = 2mahl ou = 2 x. Damit ist eine doppelte Repetition des Winkels vollbracht. Man lieset nun die Gradzahl ab, worauf am Ende der mit einem Nonius versehene Index des obern Fernrohrs zeigt, und halbirt dieselbe, so erhält man das Maß des einfachen Winkels x = A C B.

Hierbei ist angenommen worden, daß beide Alhidaden oo und uu sich genau um das Centrum des Kreises drehen (concentrisch). Bei wirklichen Repetitionskreisen ist indessen immer das untere Fernrohr uu etwas excentrisch. Welchen Einfluß dieser Fehler auf den gemessenen Winkel A C B habe, soll weiterhin gezeigt werden.

Eigentlich besteht die doppelte Repetition einer Winkelmessung, wie man sieht, aus zwei Acten; beim ersten steht das obere Fernrohr am Kreise fest, und das untere bewegt sich, beim zweiten Act geschieht das Gegentheil.

Jeder denkende Leser wird ohne weitere Erklärung

begreifen, daß die eben angezeigte Repetition zum zweiten, dritten Mahl u. s. w. wiederholt werden kann. Die Vielfachen des gesuchten Winkels x schreiten hierbei nach dieser Zahlenreihe fort:

$$2x, 4x, 6x \ldots 2nx,$$

wenn n die Anzahl der Repetitionen ausdrückt.

Bei der einfachen Repetition hingegen ist diese Reihe:

$$x, 2x, 3x \ldots nx.$$

Heißt also der ganze Bogen, welchen der Index des obern Fernrohrs nach n Doppel-Repetitionen (Multiplication) beschrieben, in Graden, Min., Sek. = S, so erhält man

$$\angle x = \frac{S}{2n}.$$

Auch bei dieser Repetition kann der Index die ganze Peripherie des Kreises einmahl oder mehrere Mahle durchlaufen haben, nebst einem Ueberschuß eines kleinern Kreisbogens. Dann wird nach einer ähnlichen Bezeichnung, wie vorher bei der einfachen Repetition:

$$x = \frac{w \cdot 360 + m}{2n}.$$

Zur Versinnlichung der erwähnten einfachen und doppelten Repetition kann man sich leicht ein kleines Modell aus dickem Kartenpapier, nach Anleitung der Fig. 23 — 26, anfertigen.

§. 63.

Vortheile der Repetition einer Winkelmessung.

Dadurch, daß man den feinern Winkelmessern eine besondre Einrichtung zum Repetiren gegeben hat, sind

die genauen Winkelbestimmungen für geodätische und astronomische Arbeiten ungemein befördert und zugleich erleichtert worden. Man richtet jetzt mit einem 8 bis 12zölligen Repetitionskreis eben so viel und noch mehr aus, als früher mit sehr schwerfälligen Sectoren von 9 Fuß im Halbmesser, wie ein solcher, z. B. unter Graham's Leitung angefertigt und von diesem geschickten Künstler selbst getheilt, bei der Gradmessung am Polarkreis von Maupertuis angewendet wurde.

Durch die einfache sowohl als doppelte Repetition wird nicht allein ein Winkel genauer, d. h. mit einer größern Annäherung zu seinem wahren Werth — wir müssen uns bekanntlich bei allen Messungen am Himmel und auf der Erde mit Annäherungen begnügen — gefunden, sondern es werden auch dadurch die Fehler, welche etwa aus der etwas unrichtigen Theilung und Centrirung eines Winkelmessers entspringen können, ganz oder doch großentheils gehoben. Dies einzusehen, hat keine Schwierigkeit.

Ist das Instrument klein, etwa nur von 8 bis 12 Zoll im Durchmesser, so kann vermittelst der Bogentheilung und eines Nonius nach einer einfachen Messung ein Winkel nicht wohl genauer als bis auf 10″ und kaum dies mit Zuversicht erhalten werden. Dadurch aber, daß man das Vielfache eines Bogenmaßes durch die einfache oder doppelte Anzahl der Repetitionen dividirt, kann man das einfache Bogenmaß oder den einfachen Winkel schon genauer auf 1″ oder selbst Theilchen einer Sekunde erlangen; das erhaltene Resultat läßt sich mit dem vergleichen, welches man mit einem Winkelmesser von viel größerm Halbmesser erreichen könnte, dessen Bogen feinere Unterabtheilungen verträgt u. s. w.

Wir wollen annehmen, was mehr oder weniger von den meisten Winkelmessern behauptet werden kann, daß die Theilung des Limbus etwas fehlerhaft sey, so

kann dieser Fehler entweder innerhalb der äußersten Grenzpunkte des ganzen Bogens S liegen, der durch n Repetitionen erhalten worden, oder der Fehler kann das Gradmaß dieses Bogens selbst betreffen. Im ersten Falle geht der Fehler gar nicht auf den einfachen Winkel über, im zweiten Falle wird er um das nfache (oder 2nfache bei der doppelten Repetition) vermindert.

Wenn der ganze Kreis vom Index w mahl durchlaufen worden, und dazu ein überschüßiger Bogen m gekommen ist, so ist nach n einfachen Repetitionen das Maß des gesuchten Winkels

$$x = \frac{w \,.\, 360 + m}{n}$$

Nun leuchtet es ein, daß, wenn dieser Winkel x wegen fehlerhafter Theilung des Instrumentes, womit er gemessen worden, um etwas falsch wäre, dieser Fehler das Stück $w \,.\, 360$, also auch $\frac{w \,.\, 360}{n}$ nicht betreffen kann, sondern nur das Stück m oder $\frac{m}{n}$.

Der Fehler im Bogen m heiße F (Minute oder Sekunden) positiv oder negativ, so ist

$$x = \frac{w \,.\, 360 + m}{n} \pm \frac{F}{n}$$

Je kleiner also F und je größer die Zahl der Repetitionen n ist, desto geringer muß der positive oder negative Fehler im gemeßnen Winkel x werden.

Beispiel: Durch 5 einfache Repetitionen sey ein Winkel (Bogen) $5x = 371^{\circ}17'$ gefunden worden, so ist

$$x = \frac{360^0 + 11^0\,17'}{5} = 72^0 + 2^0\,15'\,24'' =$$

$$74^0\,15'\,24'',$$

Wäre nun der Gradbogen von 0^0 bis $11^0\,17'$ um $1'$ falsch, etwa zu groß, so fände sich der berichtigte Winkel

$$x = 74^0\,15'\,12''.$$

Sonach hätte man den Winkel um $12''$ zu groß gefunden. Der Fehler von $1'$ im Bogen m vermindert sich daher bis auf $\frac{1}{5}'$ bei seinem Einfluß auf den gesuchten Winkel x.

Ein so grober Fehler von 1 Minute kommt jedoch bei keinem bessern Winkelmesser vor, der mittelst einer genauen Theilmaschine getheilt worden ist; selbst Repetitionskreise von 8 Zoll Durchmesser geben mit Nonien die Winkel auf $10''$, und ein Fehler im Winkel kann nur zwischen 10 und 10 Sekunden liegen, oder höchstens $\frac{1}{6}$ einer Minute betragen. Weitere Betrachtungen der Art bleiben dem Leser überlassen.

Der einfachen Repetition bedient man sich insgemein bei Messung von Horizontalwinkeln vermittelst repetirender Theodoliten; hier dient das untere Fernrohr bloß zur Versicherung; daher seine excentrische Lage keinen Nachtheil erzeugt.

Die doppelte Repetition hingegen braucht man zur Messung der Winkel überhaupt in jeder Lage der durch ihre Schenkel gelegten Ebenen, namentlich auch der Vertikalwinkel (Zenithdistanzen), vermittelst der Bordaschen Kreise.

Bei einer aufmerksamen Vergleichung beider Methoden, der ersten ursprünglich von Mayer gelehrten und gebrauchten und der zweiten von Borda ausgeführten, muß man gestehen, daß die zweite zusammengesetzter, verwickelter und eben nicht kürzer sey, und

daneben ein complicirteres kostbareres Instrument verlange, als die erstere. Die einfache Repetition scheint mir daher den Vorzug zu verdienen, wo es die Bestimmung terrestrischer Horizontalwinkel gilt. Nur bei Messung der Zenithdistanzen und der hieraus gefolgerten Höhenwinkel zu astronomischem Gebrauch hat die doppelte Repetition entschiedene Vorzüge, insbesondere darum, weil sie hier den mißlichen Gebrauch eines Horizontes erspart, wie wir in der Folge sehen werden. Dann dient aber das untere Fernrohr bloß als Libellenträger.

§. 64.

Etwas von der Theilung, dem Nonius, und der Genauigkeit eines Winkelmessers.

Es kann, dem Zweck dieser Schrift zufolge, von der Methode, einen Kreisbogen in mehr oder weniger gleiche Theile (Grade) abzutheilen, das Centrum desselben genau zu bestimmen u. s. w. hier nicht gesprochen werden. Bekanntlich werden jetzt die vollkommensten Theilungen mit Hülfe eigner sehr sorgfältig eingerichteter Theilmaschinen nach Ramsden's Construction oder dieser doch sehr ähnlich, bewerkstelligt.

Die Genauigkeit, womit ein Winkelmesser die Winkel angiebt und ablesen läßt, hängt besonders ab von der Richtigkeit der Theilung, von den feinern Unterabtheilungen der einzelnen Grade, von der Vollkommenheit der Nonien (Verniers) und von der Feinheit der Theilstriche.

Je größer der Radius eines Winkelmessers ist, desto feinere Unterabtheilungen der Grade werden möglich. Bei kleinern Instrumenten, von 5 bis 6 Zoll Halbmesser, kann man jeden Grad des Limbus noch

recht gut in 4 bis 6 Theile abtheilen, bei größern in 8 bis 10 u. s. w. *)

Auf die Feinheit der Theilstriche am Limbus kommt ungemein viel an; je mehr sich dieselben der geometrischen Linie nähern, als welche gar keine Dicke hat, desto genauer wird die Bezeichnung und das Ablesen eines Winkels, den der Index der Alhidade anzeigt. Dickere Theilstriche bedecken einen gewissen Theil des Bogens, und machen daher den gesuchten Winkel um eine dem gemäße Winkeldifferenz ungewiß. Der Leser kann sich diese Differenz auf folgende Art leicht erklären:

Der Halbmesser eines Kreises sey r, irgend ein Längenmaß, so ist:

$$r\pi ; 180^0 = r : 206264,8''.$$

Nehmlich eine Bogenlänge von 206265 Sekunden kann der Länge des dazu gehörigen Halbmessers gleichgesetzt werden. Nimmt man nun an, daß die Dicke eines Theilstriches nach dem Maße des Halbmessers m sey, so ist;

$$r : 206265'' = m : \frac{m}{r} \cdot 206265'',$$

So viel Sekunden des Bogens bedeckt nehmlich der Theilstrich m, und um eben so viel Sekunden wird der abzulesende Winkel ungewiß. Setzt man z. B. den radius des Winkelmessers r = 5 Dec.Zoll = 50 Dec. Lin., die Dicke eines Theilstriches m = 0,01 Lin., so ist:

50 Lin. : 206265'' = 0,01 Lin. : 41,2'' sehr nahe.

---

*) Ein 5zölliger (von 5 Dec.Zoll radius) Spiegelsextant, den ich besitze, ist auf seinem silbernen Limbus so getheilt, daß jeder halbe Grad, der beim Sextant ganze Grade vorstellt, wieder drei Unterabtheilungen hat, wovon jede beim Messen 20 Min. bedeutet, im Gradbogen selbst aber nur 10 Minuten beträgt.

Nehmlich in diesem Falle würde ein Theilstrich auf dem getheilten Limbus ungefähr 41″ bedecken. Wäre r = 10 Zoll, so würde derselbe Theilstrich nur $20\frac{1}{2}$ bedecken. Wäre r = 5 Zoll, m = 0,001 Lin., so deckte der Theilstrich ungefähr nur 4 Sek. Es ist aber in der Praxis wohl unmöglich, Theilstriche von so außerordentlicher Feinheit zu ziehen, und man muß sich schon mit $\frac{1}{100}$ bis höchstens $\frac{5}{1000}$ einer Linie begnügen. Die Linien auf den Glasmikrometern von Brander sollen nur 0,005 Lin. breit seyn; wie will man aber eine solche Breite zuverlässig — annähernd kann dies auf verschiedene Arten geschehen, besonders durch eine Winkelmessung — bestimmen?

Fragt man umgekehrt, wie breit ein Theilstrich, bei einem gegebenen Halbmesser r, seyn müsse, um eine gewisse Anzahl Sekunden n im Bogen zu bedecken, so ist

$$206265'' : r = n'' : m, \text{ also } m = \frac{n \cdot r}{206265}$$

Sollte z. B. an einem zehnzölligen Kreise (5 Zoll Halbmess.) ein Theilstrich nur 5 Sek. bedecken, so wäre

206265″ : 50 Lin. = 5″ : m, also müßte

m die Breite eines Theilstriches ungefähr 0,001 Lin. nach meiner Schätzung ungefähr 0,04 eines Menschenhaares, betragen. Niemand wird aber in allem Ernste glauben, daß eine solche Feinheit in der Mechanik zu erreichen möglich sey; schon 0,01 Lin. Breite kann als fein gelten.

Dies mag hinreichen, um einzusehen, in wie weit die Genauigkeit eines Winkelmessers von der Feinheit der Theilstriche abhängt.

Kleinere Unterabtheilungen von Theilen des Limbus erhält man bekanntlich vermittelst des sogenannten Nonius (Vernier), dessen Einrichtung und Gebrauch im Allgemeinen ich bei meinen Lesern als bekannt vor-

aussetzen darf, da in allen mathematischen Elementarbüchern hiervon gehandelt wird. Soll der Nonius an einem Winkelmesser ntel von den kleinsten Abtheilungen des Limbus anzeigen, so überträgt man gewöhnlich (n — 1) Theile des Limbus auf den kleinen concentrischen Bogen des Nonius, und theilt diese (n — 1) Theile hier in n Theile. Dadurch wird ein jeder Theil des Nonius um $\frac{1}{n}$ kleiner als ein Theil des Limbus. Steht nun der Nullpunkt oder erste Theilstrich des Nonius mit einem Limbusstrich genau zusammen, so bleibt jeder folgende Noniusstrich immer um $\frac{1}{n}$ eines Limbustheils weiter zurück, worauf sich das Ablesen eines Winkels bis auf ntel eines Limbustheils gründet, wenn der Index, nehmlich der Nullpunkt des Nonius nicht genau auf einen Theilstrich des Limbus zeigt, sondern zwischen zwei solchen Theilstrichen steht. In diesem Falle untersucht man vermittelst einer Loupe oder eines eignen Mikroskopes am Nonius, der wievielte Theilstrich desselben mit einem Limbusstrich genau oder doch am nächsten zusammentrifft. Die Zahl, welche diesem Theilstrich am Nonius, von o an gezählt, entspricht, deutet an, wie viel ntel eines Limbustheiles zu dem Winkel addirt werden müssen, welchen die Zahl des zunächst vor dem Nullpunkt des Nonius links liegenden Limbusstriches in Graden oder Theilen eines Grades bezeichnet. Eine zweite Art, den Nonius gegen seinen Limbus einzurichten, besteht darin, daß man n Theile des Limbus auf den concentrischen Bogen des Nonius überträgt, und diese n Theile hier in (n — 1) Theile theilt; dadurch wird jeder Noniustheil größer als ein Limbustheil um $\frac{1}{n}$tel des letztern. Diese Einrichtung des Nonius ist jedoch weniger in Gebrauch und auch in der That weniger zweckmäßig, als die erstere.

Ein Beispiel wird zur Erläuterung dieses an sich äußerst leichten Gegenstandes hinreichen. Wir wollen

annehmen, der Limbus eines Winkelmessers sey so eingetheilt, daß jeder Theil $= \frac{1}{4}^0 = 15'$ ist; der Nonius soll die Winkel bis auf $\frac{1}{2}$ Minute angeben. Nun ist $\frac{1}{2}$ Minute $= \frac{1}{30}$ von $15'$, einem Theil des Limbus; man trägt also 29 Theile des Limbus, wovon jeder $15'$ bedeutet, auf die Noniusplatte, und theilt hier diesen Bogen in 30 Theile, so ist jeder Noniustheil um $\frac{1}{2}$ Minute kleiner als ein Limbustheil, folglich gibt der Nonius die abzulesenden Winkel bis auf $\frac{1}{2}$ Minute an. Gesetzt also, bei einer Winkelmessung mit einem so eingerichteten Instrument stände der Inder, nehmlich der erste, gewöhnlich mit einem besondern Zeichen etwa in Form eines Pfeils, bezeichnete Theilstrich des Nonius zwischen $37\frac{1}{4}$ und $37\frac{2}{4}$ Grad, so daß der 11te Theilstrich auf dem Nonius, von 0 an gezählt, genau mit einem Limbusstrich zusammenträfe, so wäre der abzulesende Winkel $= 37\frac{1}{4}^0 + \frac{11}{2}' = 37^0\,20'\,30''$.

Wären die kleinern Abtheilungen des Limbus $= \frac{1}{6}^0 = 10'$, und ein Bogen von 39 solcher Theile auf dem Nonius in 40 Theile getheilt, so gäbe dieser die Winkel bis auf $\frac{10'}{40}$ oder $\frac{1}{4}' = 15''$, u. s. w.

Je größer der Halbmesser eines Winkelmessers ist, desto feinere Unterabtheilungen verträgt sein Limbus und sein Nonius; um so genauer läßt sich also damit ein Winkel erhalten. Genauer als auf 10 Sekunden, unmittelbar mit dem Nonius, erlangt man sie indessen gewöhnlich nicht, auch vermittelst größerer Instrumente, z. B. des Bordaschen Kreises; ich sage, mit Zuverläßigkeit.

Es muß jedoch erinnert werden, daß, im Fall das Instrument genau getheilt und centrirt ist, die Theillinien des Limbus und Nonius genau den Radien des Kreises entsprechen, nehmlich verlängert durch den Mittelpunkt desselben gehen, und auch die Theilstriche des Limbus und Nonius überall von ganz gleichförmiger

Breite (Dicke) sind, dann ein Winkel, auf welchen der Index zeigt, noch um die Hälfte genauer abgelesen werden kann, als ihn der Nonius unmittelbar angiebt. Stimmt nehmlich bei einem gewissen Stand des Index kein Theilstrich des Nonius völlig genau mit einem Theilstrich am Limbus, welches sehr oft geschieht, so läßt sich durch die starke Vergrößerung des Mikroskopes bei einiger Uebung noch ganz leicht wahrnehmen, ob beide Theilstriche etwa um die Hälfte ihrer Breite von einander liegen. Hierdurch erhält man die abzulesenden Winkel um die doppelte Genauigkeit des Nonius annähernder. Giebt nehmlich dieser die Winkel auf 30″, so bekommt man sie durch die erwähnte Schätzung mit hinlänglicher Zuverläßigkeit auf 15″, nehmlich der noch mögliche Fehler kann nicht mehr 15″, positiv oder negativ, betragen. Am besten erläutert man sich dies alles durch eigne aufmerksame Betrachtung eines guten Winkelmessers. An einem solchen ist sowohl der Gradbogen des Limbus als auch der kleine Bogen des Nonius von Silber, welches nicht so leicht oxydirt (anläuft), als Messing.

§. 65.

Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmessers

Wie sehr die Genauigkeit aller kleinern und größern Operationen von einer richtigen Winkelmessung abhänge, muß jedem Anfänger bekannt seyn. Je vollkommener daher die hierzu gehörigen Werkzeuge sind, desto mehr nähern sich die durch Beobachtung und Berechnung erhaltenen Resultate der Wahrheit.

Ueber die mannichfaltigen Fehler, welche ein Winkelmesser haben kann, über die Methoden, diese Fehler

aufzusuchen, zu corrigiren, solche auch, wenn zur Abhelfung derselben am Instrument selbst keine Vorrichtungen sind oder seyn können, bei einer Vermessung in Rechnung zu bringen; darüber ließe sich ein ganzes Buch schreiben. In dieser weiten Ausdehnung kann dieser Gegenstand wegen Beschränktheit des Raums hier nicht behandelt werden. Am besten wird es immer seyn, um sich die verdrießlichen und stets etwas unsichern Correctionen zu ersparen, wenn man nur aus der Werkstätte eines wissenschaftlich gebildeten, mit allen Hülfsmitteln der feinern Mechanik ausgerüsteten Künstlers einen guten Winkelmesser nimmt, der folgende allgemeine Proben aushält. Ist man einmahl eines so wichtigen Werkzeuges benöthigt, so wird man lieber einen etwas höhern Preis an das Bessere setzen, als zu dem Gemeinen und für genaue Messungen Untauglichen greifen wollen. Untauglich in diesem Sinne habe ich die meisten ältern Winkelmesser, z. B. Astrolabien mit Halbkreisen u. s. w., die noch häufig unter den Feldmessern circuliren, bei näherer Untersuchung befunden.

Ob ein Winkelmesser richtig, genau getheilt, gut centrirt und seine Fläche eine vollkommene Ebene sey, dies mit Sicherheit zu erfahren, giebt es besonders folgende Wege:

Die Richtigkeit der auf dem Limbus befindlichen Theilung läßt sich, wenn das Instrument aus einem Vollkreis besteht, einigermaßen schon mit einem feinen Stangenzirkel untersuchen, womit man die Chorden von größern oder kleinern gleichen Bogen von verschiedenen Punkten des Limbus aus vergleicht. Finden sich diese überall gleich, so kann die Theilung wenigstens keine groben Fehler haben, und ein gemeinerer Winkelmesser ohne Nonien, z. B. die Boussole, welche die Winkel höchstens nur auf Viertelgrade genau geben kann, ist

brauchbar genug in Hinsicht seiner Theilung, wenn er diese Prüfung besteht; die meisten ältern Winkelmesser, Astrolabien ꝛc., die ich zu sehen Gelegenheit hatte, hielten diese Prüfung nicht aus; ja die Theilung ist an ihnen oft so äußerst fehlerhaft, daß man sie mit einem geübten Auge, selbst ohne Stangenzirkel, bemerken kann. Bei dieser Untersuchung wird man am besten zuerst die Gleichheit der vier Quadranten des Kreises, nehmlich von 90° zu 90°, dann die Bogen von 60° zu 60°, deren Sehnen dem Halbmesser des Kreises gleich sind, untersuchen u. s. w. Besteht der Winkelmesser nur aus einem Halbkreis oder Viertelkreis (Quadrant) oder Sechstelkreis (Sextant) u. s. w., so ist die Prüfung mit dem Stangenzirkel nicht zureichend; hier kann der ganze Bogen falsch seyn, nehmlich die Anzahl der Grade nicht enthalten, die er anzeigt, die Abtheilungen der falschen Grade aber können dessenungeachtet überall gleich seyn. Die Größe dieses Fehlers, welche sich bei Beobachtungen noch am leichtesten und zuverläßigsten in Rechnung bringen läßt, muß anderweitig durch Winkelmessungen und Vergleichung mit andern genauen Winkelmessern ausfindig gemacht werden.

Die feinern Fehler einer Theilung an den bessern Winkelmessern, welche mit einem oder wohl mehreren (2 bis 4) Nonien versehen sind, so wie zugleich der Fehler der Excentricität, lassen sich mit Hülfe dieser Nonien selbst entdecken. Vor dieser untrüglichen Prüfung (examen rigorosum) scheuen sich selbst die vorzüglichsten Künstler, und selten besteht sie ganz und durchgängig auch das vortrefflichste, mit allem Fleiß gearbeitete, Kreisinstrument, besonders wenn es vier Nonien als eben so viel Wächter bei sich führt. Der Bogen des Nonius ist nehmlich gleichgemacht einem Bogen des Limbus, nach irgend einer Abtheilung; stellt man daher den Anfangspunkt (Nullstrich, Index) des Nonius genau

auf einen Theilstrich des Limbus, so muß der letzte Theilstrich des Nonius mit einem andern Theilstrich des Limbus zusammentreffen. Enthielte der Nonius 30 Theile = 29 Limbustheilen, so muß, wenn der Winkelmesser richtig ist, überall der Noniusbogen 29 Limbustheile fassen, auf welchen Theilstrich des letztern man auch den ersten Theilstrich (Inder) des Nonius stellen mag. Noch weit entscheidender aber wird die Prüfung mit zwei oder vier Nonien, nehmlich durch Beobachtung der Entfernungen ihrer Anfangspunkte auf verschiedenen Theilen des Vollkreises. Diese wesentliche Hauptprobe leistet mehr als der beste Stangenzirkel. Eine solche Untersuchung muß mit stark vergrößernden Mikroskopen geschehen, welche keinen Zweifel im Sehen übrig lassen, fängt am besten vom Nullpunkt des Limbus an, und wird dann, wenn nicht von allen, doch von vielen verschiedenen Theilstrichen des Bogens aus fortgesetzt. Zeigen sich bei dieser Prüfung kleine Abweichungen, — ich habe bis jetzt nur einen repetirenden Theodolit mit 4 Nonien kennen gelernt, der bei der scrupulösesten Untersuchung mir gar keine bemerkliche Abweichung zeigte —, so können sie von einem kleinen Fehler in der Theilung, der bisweilen bei guten Instrumenten gegen 15″ oder noch mehr aufs Ganze beträgt, oder auch von einer geringen Excentricität herrühren. Die vollkommene Centrirung eines Kreisinstruments wird noch bis jetzt von den ersten Meistern der Kunst für schwierig gehalten, und kleine Fehler der Excentricität kommen selbst an den hochgepriesenen Englischen Instrumenten gar nicht selten vor. Es ist aber ein solcher Fehler noch schlimmer als ein Fehler der Theilung; letzterer läßt sich, wenn man alle fehlerhaften Stellen am Limbus genau erforscht und in eine Correctionstabelle gebracht hat, bei Beobachtungen leichter in Rechnung bringen, als ersterer.

Die Excentricität, nehmlich die Bewegung der Alhidade mit ihrem Inder um einen Punkt, der nicht genau mit dem Mittelpunkt des Limbusbogens zusammenfällt, läßt sich ziemlich zuverläßig erkennen, indem man den Nonius längs dem Limbus fortbewegt. Bleibt der Noniusbogen hierbei nicht überall gleich weit von dem zugehörigen Limbusbogen, so ist das Instrument mehr oder weniger excentrisch, vorausgesetzt, daß beide, der Limbus- und Noniusbogen, vollkommene Kreisbogen sind. Bei guten Winkelmessern wird indessen wohl selten ein grober Fehler der Art bemerkt werden. Aus den Differenzen der gefundenen Abstände ließe sich nach einer besondern Formel die Excentricität berechnen, wenn die Differenzen selbst beträchtlicher wären, als man sie gewöhnlich bemerkt.

Was aber die Excentricität des untern Fernrohrs an Repetitionskreisen betrifft, so soll davon gehörigen Orts das Nähere mitgetheilt werden.

Eine dritte Methode, die Richtigkeit eines Winkelmessers zu prüfen, besteht darin, daß man mit demselben die drei Winkel eines großen Dreiecks auf der Erdoberfläche, welches sich indessen noch als ein geradlinigtes ansehen läßt, ausmißt. Ist die Summe der gemessenen Winkel gleich 180° oder doch um eine sehr geringe Differenz, etwa von $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ Minute, dieser Summe nahe, so kann man den Winkelmesser als richtig und brauchbar ansehen; denn was eine so geringe Abweichung von 30″ oder 15″ anlangt, so kann dieselbe auch sehr leicht durch eine etwas unsichere Beobachtung (Visiren) entstanden seyn. Man verbessert in diesem Falle jeden der drei Winkel um den dritten Theil der positiven oder negativen Differenz. Man wird, um sicher zu gehen, sehr wohl thun, wenn man diese Untersuchung mehrere Mahle und zwar auf verschiedene Arten vornimmt. Große Dreiecke auf einem ebenen

Terrain kann man sich selbst durch scharf begrenzte Signale ausstecken; den Versuch kann man mit einem gleichseitigen, oder gleichschenklichten, oder ungleichseitigen Dreieck anstellen. Zu genauer Beobachtung (Visiren) wird aber hierbei der Winkelmesser mit einem Fernrohr versehen seyn müssen, da man beim Visiren nach einem Object mit bloßen Augen und gemeinen Dioptern Fehler von einer oder einigen Minuten begehen kann. Endlich kann auch die erwähnte Differenz zum Theil mit von einem unrichtigen Ablesen des Winkels am Winkelmesser, wegen der Dicke der Theilstriche, veranlaßt werden. Alles dies muß man wohl bedenken, und es bei einem Versuch nicht bewenden lassen. Die von mehreren Geometern empfohlene Methode, auf dem Felde die Seiten eines großen Dreiecks, besonders eines gleichschenklichten, nach irgend einem Längenmaß sehr genau auszumessen oder selbst abzustecken, dann aus diesen Seiten die Winkel des Dreiecks trigonometrisch zu berechnen, und endlich diese Winkel mit einem Winkelmesser, zur Prüfung desselben, wirklich zu messen, möchte in der That meistens unsicher seyn, da die vollkommen richtige Längenbestimmung der Seiten in jedem Fall noch einigem Zweifel unterliegt, und schon kleine Fehler in den Längen einen beträchtlich nachtheilichen Einfluß auf die berechneten Winkel habe, wie sich ein jeder Leser durch eine Doppelberechnung der Winkel zweier Dreiecke, die in ihren Seiten um eine Kleinigkeit differiren, überzeugen kann.

Statt der drei Winkel eines großen Dreiecks kann man auch die Summe aller Centriwinkel in einem Kreise $= 360^0$ gebrauchen; den Kreis stellt hier der sichtbare Horizont, den Mittelpunkt desselben der Ort der Beobachtung vor. Man kann also mit einem Winkelmesser rund herum im Horizont nach einander mehrere Winkel, die entfernte scharfbegrenzte Objecte oder

eigens dazu ausgesteckte Signale (Pikets) mit dem Auge des Beobachters bilden, messen; beträgt die Summe aller einzeln gefundenen Winkel ganz oder doch sehr nahe 360°, so spricht dies für die Richtigkeit des Winkelmessers. In Hinsicht der geringen positiven oder negativen Differenzen, die sich bei dieser Prüfung ergeben können, gilt dasselbe, was ich oben bei der Prüfung mit den Winkeln eines Dreiecks bemerkte. Auch bei dieser Untersuchung lassen sich mancherlei Abwechselungen gedenken; man kann von verschiedenen Punkten im Umkreise die Winkelmessung anfangen, größere oder kleinere, auch gleiche Winkel, hierzu gebrauchen; man kann selbst repetiren, nehmlich den Umkreis des Horizontes einige Mahle durchlaufen u. s. w. Ein wenig Nachdenken wird den Leser, ohne weitere Erklärung, bemerken lassen, daß man auf diese Weise auch die Richtigkeit einzelner Bogen des Winkelmessers, z. B. die Bogen von 60° zu 60° ꝛc., untersuchen kann, welches vorzüglich leicht geschieht, wenn das Instrument eine besondere Einrichtung zum Repetiren hat. —

Dr. Benzenberg berichtet in einem lesenswerthen Aufsatz des Astronomischen Jahrbuchs von Bode, Jahrg. 1806. S. 223 ꝛc., daß er durch das Rundmessen der Winkel im Horizont einen für vorzüglich gehaltenen fünfzölligen Spiegelsextanten, von Troughton in London, geprüft, etwas fehlerhaft in der Theilung befunden, und diese Fehler genau untersucht in eine Tabelle gebracht habe, um bei einer grossen geodätischen Operation, wo die Dreiecke des ersten Ranges auf Standlinien von ungefähr 3 Stunden Länge beruhten, in Beobachtung der Winkel mit jenem Sextanten die bemerkten kleinen Fehler in Rechnung zu bringen. Beim Herummessen der Centriwinkel im Horizonte betrug, wenn Winkel von 90° gebraucht wurden, die Differenz gegen 360° immer 35″. Wurden

von der Sternwarte aus 3 Thürme genommen, die Winkel von 120° machten, so betrug der Fehler 38″; bei 5 Winkeln von 72° betrug er 32″ u. s. w. Um die Fehler für kleinere Winkel zu beobachten, machte Benzenberg die Wahner-Heide gleichsam zu einer Theilmaschine, und steckte auf ihr einen Kreis von 1000 Fuß Halbmesser mit Pikets für verschiedene Winkel ab. Mit 6 Pikets für die Bogen von 60° fand sich der Fehler zu 33″. Aus einer Menge von Beobachtungen ergab sich, daß auf dem Limbus des Sextanten die Fehler von 120° bis 45° regelmäßig von 38″ bis 31″ abnahmen, hingegen von 45° bis 36° so unregelmäßig wurden, daß sie von Grad zu Grad bestimmt werden mußten; von 36 bis 0° wurden die Fehler von 5 zu 5° bestimmt. Diese Untersuchung machte eine sehr weitläufige, beschwerliche Reihe von Beobachtungen nöthig, vorzüglich bei kleinen Winkeln, z. B. von 5°, wobei über 384 Beobachtungen anzustellen waren.

Man kann hieraus schließen, wie höchst mühsam und verdrießlich eine vollständige Untersuchung der Fehler eines Winkelmessers seyn müsse; ist sie aber einmahl glücklich vollendet und darnach eine Correctionstabelle entworfen, so können mit dem etwas fehlerhaften Instrument fortan die Winkel eben so genau genommen werden, als mit einem fehlerfreien. Sind große genaue Triangulirungen mit einem Instrument, welches die Winkel nicht repetirt, zu verrichten, so darf man sich der Mühe der erwähnten Untersuchung durchaus nicht entziehen; für kleinere Aufnahmen kann sie entbehrt werden, so wie auch für große Vermessungen, wenn man hierzu einen Repetitionskreis hat, der die Fehler des Instruments ganz aufhebt oder doch so weit vermindert, als man will.

Gilt es die Ausführung sehr großer Aufnahmen, z. B. eines ganzen Landes oder sehr genaue Winkel-

messungen bis auf 1", so würde ich immer zu dem rathen, was dem jetzigen Zustand der mathematischen Wissenschaft und Kunst, durch die Bemühungen großer Geometer und Künstler so weit über die Leistungen früherer Zeiten erhoben, angemessen ist, nehmlich zu einem guten Repetitionskreis.

Andere Methoden, die Fehler eines Winkelmessers, besonders in Hinsicht seiner Theilung, aufzusuchen, z. B. mittelst einer Mikrometerschraube, welche der Astronom Tob. Mayer dem Nonius zur Bestimmung kleiner Winkeldifferenzen vorzog, können als weniger brauchbar hier übergangen werden. Die Untersuchungen und Correctionen, welche bei einzelnen Instrumenten insbesondre nöthig werden, werde ich bei Beschreibung dieser Instrumente selbst anmerken.

Wir wenden uns nun zur Beschreibung der Winkelmesser selbst, sowohl der einfachern, weniger genauen, als auch der zusammengesetzteren, welche eine größere Annäherung zur Wahrheit gestatten; indessen werde ich nur die brauchbarsten anführen, und mehrere ältere undienliche Einrichtungen, welche jetzt wenig oder gar nicht mehr in der Praxis vorkommen, zur Ersparung des Raums übergehen.

§. 66.

Bousssole zum Winkelmessen.

Dies seiner Natur nach sehr unvollkommene Werkzeug sollte man nur in einigen unvermeidlichen Fällen der niedern Landmessung, welche weiterhin angezeigt werden, zu Rathe ziehen. Allein jeder warnenden Vorstellung und gründlichen Belehrung erfahrner Geometer zum Trotz, bedienen sich desselben die meisten Feldmesser noch immer fast ausschließlich zu Aufnahmen und

Winkelbestimmungen überhaupt, ohne Noth und noch dazu ohne Zeit- und Kosten-Ersparung; denn eine gut gearbeitete Boussole, womit man die Winkel höchstens bis auf Viertelgrade gewiß erlangt, kostet meines Wissens eben so viel als ein kleinerer Theodolit mit Fernrohr ohne Repetition, welcher die Winkel wenigstens auf 2 oder 1 Minute genau angiebt. Ich kann mir die für die Winkelboussole noch immer bestehende Hochachtung nur aus übertriebener Anhänglichkeit an den alten Schlendrian, aus der Bequemlichkeit oder Unkunde derer erklären, die ihre Anwendung zum Feldmessen so weit ausdehnen.

Die Gestalt und Construction der Boussole ist so allgemein bekannt, daß es meinen Lesern an einigen kurzen Notizen hierüber genügen wird.

Die Länge der Magnetnadel kann 5 bis 6 Zoll betragen, eben so viel der Durchmesser des am Boden der Kompaßbüchse beschriebenen, bis auf halbe oder Viertel-Grade eingetheilten Gradbogens. Der scharf zugespitzte stählerne Stift, auf welchem und um welchen die Nadel ihre Horizontalbewegungen macht, muß genau im Mittelpunkt des eingetheilten Kreises und senkrecht darauf stehen. Die Nadel muß bis auf das maximum magnetisirt und richtig equilibrirt seyn. Außer der Linie des magnetischen Meridians, mit Nord — Süd bezeichnet, kann man noch den wahren Meridian annähernd durch eine Linie bezeichnen, wenn für einen gewissen Ort der Erde die Declination bekannt ist; diese zeigt sich aber selbst veränderlich, wie oben bemerkt worden. Der magnetische Meridian soll genau durch die Mitte der Nadel und ihres Hütchens (gewöhnlich von Agat) gehen. Die beste Form der Nadel ist nach der Erfahrung die ganz einfache eines rechtwinklichten dünnen Parallelepipedons, welches sich auf seiner schmalern Seitenfläche dreht; alle Verzierungen

müssen hier vermieden werden. Das Nordpolende, welches zum Index dient, läuft in eine schmale Spitze aus, oder was wohl noch zweckmäßiger, auf der obern Fläche der Nadel längs ihrer Mitte hin ist eine zarte Linie eingerissen, die die Richtung des magnetischen Meridians bezeichnet.

Zum Visiren dient ein gewöhnliches gutes Dioptrlineal (Fernrohr ist für eine Boussole zu kostbar), welches mit der Kompaßbüche in eine solche Verbindung gesetzt ist, daß seine Diopterebene senkrecht auf die Kreisebene des Instruments steht, und genau durch den Mittelpunkt des Kreises geht; am schiklichsten läuft die Diopterebene durch die Linie des magnetischen Meridians (Nord — Süd). Manche Schriftsteller, auch Mayer in seiner practischen Geometrie, versetzen das Diopterlineal an einen Seitenrand der Boussole, so daß dessen Visirlinie und Alhidade mit der Linie Nord-Süd in der Büche parallel läuft. Die erstere Einrichtung aber verdient der Richtigkeit wegen den Vorzug.

Ein Vernier an der Boussole, den Manche vorgeschlagen und dabei wirklich angebracht haben, scheint mir bei der Unvollkommenheit des ganzen Instruments überhaupt ein sehr überflüßiger Zusatz.

Das Stativ, die größern und kleinern Bewegungen können wie beim Meßtisch seyn. Die feinern Drehungen (Azimuthalbewegung) der Boussole geschehen jetzt gewöhnlich mit Schraube ohne Ende.

Die Horizontalstellung des Werkzeugs geschieht am besten mittelst einer dosenförmigen Libelle.

In der Nähe der Magnetnadel darf, wenn sie ihren natürlichen Stand nicht mehr oder weniger verändern soll, kein Eisen seyn; daher man sich sehr vorsehen muß, daß auch das zur Boussole gebrauchte Messing nicht eisenhaltig sey, wie man es oft genug befindet.

Eine Bouſſole in Hinſicht der richtigen Theilung und Centrirung zu prüfen, hat keine Schwierigkeit. Ob die Magnetnadel ſehr empfindlich, leicht beweglich, oder, wie man ſonſt ſagt, nicht faul ſey, wird man bald erkennen, wenn man die horizontal aufgeſtellte Bouſſole um ſehr geringe Azimuthalwinkel herumdreht u. ſ. w.

§. 67.

Schmalkalder's Handbouſſole. (Fig. 27).

Als eine Abbreviatur und zu flüchtigen militäriſchen Aufnahmen, die bekanntlich keine große Genauigkeit erheiſchen, wirklich brauchbare Abänderung der größern Bouſſole iſt ſeit einigen Jahren eine kleine Handbouſſole unter dem Namen: Patent Boussole, von Schmalkalder in London zuerſt ausgeführt, bekannt geworden. Sie hat ungefähr die Größe einer kleinen gewöhnlichen Orientirbouſſole, nehmlich die cylinderförmige meſſingene Kapſel, etwa 3 Zoll Durchmeſſer. Auf die Magnetnadel, welche ſich wie gewöhnlich auf einem zugeſpitzten ſtählernen Stifte dreht, iſt eine Kreisfläche aus mäßig dickem Kartenpapier oder auch aus ſehr dünngeſchlagenem verſilberten Meſſingblech angekittet. Der Kreis iſt in 360 Grade, auch wohl noch in halbe Grade, abgetheilt, und ſein Mittelpunkt ſteht genau über dem Umdrehungspunkt der darunter verſteckt liegenden Nadel. Sonach iſt die Nadel mit dem Gradbogen in einer feſten Verbindung, und beide behalten bei jeder horizontalen Stellung der Kapſel nach irgend einem Azimuth immer ihre unveränderte Richtung gegen Norden, oder die Nadel dreht ſich mit dem eingetheilten Bogen immer um gleiche Winkel auf dem Stift als Achſe betrachtet. Der Kreis muß aber wegen der ſchwachen magnetiſchen

Kraft der kleinen Nadel so leicht als möglich (daher gewöhnlich von Papier) und die Reibung sehr gering seyn, wenn bei der Drehung der Kapsel die Nadel genau in ihrem magnetischen Meridian bleiben, oder nicht faul seyn soll. An der einen Seite des obern Kapselrandes ist ein kleines gewöhnliches Diopter d aufgesetzt, welches sich mittelst eines Scharnieres aufrichten und auf den Glasdeckel der Kapsel niederlegen läßt. Diesem Diopter gegenüber ist um ein Scharnier ein kleines in Messing gefaßtes Glas-Prisma v beweglich; die Neigungswinkel der beiden Cathetenebenen betragen 45°. Dieses Prisma läßt sich so weit niederlegen, daß die Cathetenebene mn gerade über dem Limbus des Kreises und parallel zu dessen Ebene steht; fällt nun das Bild von einem Limbustheil unter 45° auf die Hypothenusenebene mp, so wird der Lichtstrahl dieses Bildes wiederum unter 45° zurückgeworfen, wie in der Optik gelehrt wird. Es vertritt demnach hier das gefaßte Prisma die Stelle eines in der Hypothenusenebene mp liegenden reflectirenden Spiegels. An der untern über dem Gradbogen parallel zu stellenden Cathetenebene mn ist eine kleine convexe Linse von c. 1 Zoll Brennweite angeschliffen, welche hier die Stelle einer planconvexen Loupe vertritt. Die Fassung der senkrecht stehenden Cathetenebene np hat eine Oeffnung (Schlitz) zum Visiren, wodurch man zu gleicher Zeit durch Diopter d auf einen entfernten Punkt visirt, und vermöge der Reflexion der Spiegelebene mp die dazu gehörige Gradzahl am Limbus vergrößert sieht, so daß das Bild des entfernten Objects, nehmlich ein bestimmter Punkt desselben, und die Zahl am Gradbogen in eine Vertikalebene zusammenfallen. Die Gradzahlen müssen auf dem Bogen in verkehrter Lage gesetzt seyn, um nach der Reflexion vom Spiegel dem Auge gerad zu erscheinen. In ein weiteres Detail einzelner Theil

dieses kleinen Werkzeugs kann hier nicht eingegangen werden; es versteht sich dies auch fast von selbst.

Um damit einen Winkel zu messen, hält man die kleine Boussole in der Hand oder setzt sie noch besser nahe horizontal auf eine feste Unterlage, dreht sie so weit, daß man durch das Diopter d den einen entfernten Gegenstand sieht, und bemerkt die Gradzahl am Limbus; hierauf dreht man die Boussole um ihre Achse so weit herum, daß man durch das Diopter d das zweite Object sieht, und bemerkt auch jetzt die Gradzahl am Limbus. Aus den beiden Gradzahlen wird, wie sonst bei Boussolen geschieht, das Maß des gesuchten Winkels ganz leicht gefunden u. s. w.

Eine größere Genauigkeit als auf $\frac{1}{2}$ Grade, und nach meinen Beobachtungen kaum dies, darf man von diesem sehr unvollkommenen, bloß zu ganz gemeinen flüchtigen militärischen Aufnahmen dienenden Werkzeuge nicht erwarten.

§. 68.

Libelle oder Wasserwaage mit Luftblase.

(Niveau à bulle d'air.)

Da die Libelle nicht allein zur Horizontalstellung des Meßtisches, sondern auch zur richtigen Stellung der vorzüglichsten Winkelmesser so wie des Nivellirinstrumentes mit Fernrohr ein ganz unentbehrliches Hülfsmittel ist, so muß eine kurze Beschreibung desselben hier vorausgehen:

Es sind zwei verschiedene Formen (Constructionen) der Libelle bekannt, nehmlich die dosenförmige und die cylinder- oder röhrenförmige. Die Dosenlibelle braucht man besonders zur Horizontalstellung des Meßtisches, auch wohl des künstlichen Horizontes, wenn nicht die

größte Genauigkeit verlangt wird; die Röhrenlibelle hingegen an Winkelmessern und Nivellirinstrumenten, welche eine schärfere Berichtigung der Neigungen gegen den Horizont verlangen.

Die Dosenlibelle (Fig. 28.), wie ich mir selbst eine solche zur horizontalen Stellung des Meßtisches habe anfertigen lassen, kann aus einem dosenförmigen Gefäß von Messing, aus einem Stück, oben offen, bestehen. Der Durchmesser kann gegen 4 Zoll (auch etwas weniger), die Höhe $1\frac{1}{2}$ Zoll betragen. In die obere Oeffnung der Dose ist ein sehr genau geschliffener Glasdeckel luftdicht eingesetzt; der Kitt, dessen man sich zur festen Verschließung mit bedienen muß, darf von der Flüßigkeit in der Libelle nicht angegriffen werden. Die eingesetzte Glasplatte ist oben vollkommen eben und an der untern (innern) Seite etwas wenig concav, nach einem Bogen von sehr großem Halbmesser ausgeschliffen, weil ohne diese Vorrichtung die Luftblase zu empfindlich und auch bei horizontalem Stand nicht genau auf die Mitte des Deckels angewiesen ist. Der starke Boden hat rund herum einen vorspringenden Rand, welcher aufs sorgfältigste, wozu viele Versuche nöthig, so abgedreht wird, daß die dadurch gelegte Fläche, Grundfläche, parallel mit der ebenen Oberfläche des Glasdeckels ist. An der Seitenwand der Dose läßt sich eine kleine starke Schraube m fest einschrauben, und erforderlichen Falls herausschrauben. Durch die Oeffnung bei m, nach Herausdrehen der Schraube, füllt man das Gefäß mit destillirtem Wasser oder noch besser mit reinem Alkohol oder Aether so weit voll, daß noch eine kleine Portion Luft darin bleibt. Sodann verschließt man das Gefäß mit der Schraube, setzt dasselbe auf seine Basis, und sieht zu, ob die Luftblase groß genug ist; ist sie zu klein und daher zu wenig empfindlich (beweglich), so öffnet man nochmals die Schraube,

läßt einen oder einige Tropfen der Flüßigkeit ausfließen und Luft dafür eintreten, u. s. w. Worauf die Vollkommenheit dieser Libelle beruhet, sieht jeder Leser sogleich von selbst. Ist sie gehörig justirt, so muß, wenn man sie auf eine horizontale Ebene setzt, die Luftblase genau in der Mitte n des kreisförmigen Glasdeckels stehen; diese Mitte ist an meiner Libelle mit einigen eingeschliffenen kleinen concentrischen Kreisen bezeichnet, welche dem Umfang der Luftblase bei verschiedenen Temperaturen entsprechen. Bei kalter Temperatur ist nehmlich die Luftblase größer, bei wärmerer Luft kleiner. Um nun die Dosenlibelle zu prüfen, und nöthigenfalls zu corrigiren, dient folgender Versuch. Man setze sie auf die möglichst vollkommene Ebene eines Meßtisches oder eines Glashorizontes, richte durch die bekannten Mittel, z. B. Stellschrauben, die Ebene (Unterlage) so ein, daß die Luftblase der Libelle sehr genau in die Mitte kommt. Sodann drehe man sie auf ihrer unverrückten ebenen Unterlage allmählig herum, und beobachte, ob sie immer ihren Stand in der Mitte behält; geschieht dies, so ist man von der Richtigkeit der Libelle, nehmlich ihrer Anwendbarkeit zu oben erwähnten Zwecken, überzeugt. Im Gegentheil muß sie von einem Mechanikus um den beobachteten Fehler berichtigt werden. Hat man sie aber einmahl vollkommen justirt, so kann sie lange Zeit, ohne merklich fehlerhaft zu werden, zur Horizontalstellung ebener Flächen, z. B. des Meßtisches, gebraucht werden.

Die cylinderförmige Libelle (Fig. 29.), welche mehr Genauigkeit gewährt, als die vorerwähnte, ist ihrer Gestalt und wesentlichen Einrichtung nach allgemein bekannt. Nach der gewöhnlichen Angabe soll sie aus einer geraden cylinderförmigen Glasröhre bestehen, diese Röhre mit reinem Wasser, besser mit Alkohol oder Aether gefüllt seyn, und über der Flüßigkeit eine grö-

ßere oder kleinere Luftblase enthalten, die nach physikalischen Gründen bei jeder Lage der Libelle die höchste Stelle einnimmt. Die Röhre A wird an beiden Enden zugeblasen oder auf andere Weise hermetisch verschlossen. Wenn nun dieselbe im Innern eine geometrisch genaue Cylinderform hat, welche man durch Ausschleifen vorher schon calibrirter Röhren vermittelst metallener cylindrischer Bolzen (Dornen) und eines feinen Schmirgels erlangt, so soll bei horizontaler Lage der Libellenachse die Luftblase in der Mitte der Röhre stehen, bei einer auch sehr geringen Neigung dieser Achse gegen den Horizont aber soll sich die Blase nach dem höhern Ende der Achse hinbewegen. So wird die Form einer guten Libelle von den meisten, selbst vorzüglichen Schriftstellern, z. B. von Mayer in seiner practischen Geometrie, B. II. S. 103 — angezeigt. Gegen diese etwas irrige Angabe muß nothwendig erinnert werden, daß die Luftblase bei horizontaler Lage der Libelle, wenn diese vollkommen cylindrisch wäre, jeden Stand zwischen beiden Enden der Röhre einnehmen könnte. Nach hydro-ärostatischen Gesetzen bewegt sich die Luftblase bloß in dem Fall, wenn die Flüssigkeit auf der einen Seite höher steht als auf der andern. Bei horizontaler Lage der vollkommen cylindrischen Röhre könnte sie aber jede Stelle einnehmen, ohne daß sich der Höhenstand der Flüßigkeit auf beiden Seiten änderte. Sonach gäbe eine Libelle von dieser Gestalt keine richtige Anzeige vom horizontalen Stand, auch würde die Luftblase beim wirklich horizontalen Stand viel zu empfindlich, nehmlich hin und her beweglich, also schwerlich zur Ruhe zu bringen seyn. Aus diesem Grunde, der für denkende Leser keiner weitern Auseinandersetzung bedarf, wird der vertikale Durchschnitt der Höhlung einer wirklich guten brauchbaren Libelle dem Bogen eines Kreises aber von großem Ra-

dius, ähnlich seyn müssen. Je größer dieser Radius, desto mehr nähert sich der Bogen der geraden Linie, desto empfindlicher wird daher die Luftblase bei sehr geringen Neigungen der Libelle gegen den Horizont. So groß nehmlich dieser Neigungswinkel in Graden — hier in Sekunden — ist, um eben so viel im Bogen rückt die Luftblase, welche immer die höchste Stelle einnimmt, von der Mitte nach einem Ende weiter. Man kann sich dies und den Grad der Empfindlichkeit einer solchen Libelle folgendergestalt erläutern: AB (Fig. 30) stelle eine Libelle in horizontaler Lage vor, der Bogen AB ihre Concavität, CB den Krümmungshalbmesser. Wird nun die Achse der Libelle um den Winkel B′NB gegen den Horizont geneigt, oder, kommt sie gleichsam in die Lage A′B′, so rückt der Bogen AB in die Lage A′B′, nehmlich in der Peripherie des Kreises weiter um den Bogen BB′, in Gradmaß gleich dem Neigungswinkel der Libelle gegen den Horizont. Denn es ist:

$\angle NB'M = \angle MBC$

$\angle NMB' = \angle BMC$, also

$\angle B'NB = \angle BCB' =$ Bogen BB′ in Gra-

den, u. s. w.

Je größer nun der Krümmungshalbmesser CB, desto größer wird die Länge des Bogens BB′, um welchen die Luftblase bei einem sehr kleinen Neigungswinkel der Libelle B′NB (etwa gleich 1 oder einigen Sekunden) fortrückt. Gesetzt, man verlangte, daß die Bogenlänge BB′ bei einem Neigungswinkel von 1 Sek. eine Decimallinie betrage, nehmlich die Libelle bei einem so geringen Neigungswinkel diesen beträchtlichen Ausschlag von 1 Linie geben sollte, so würde die Länge des Krümmungshalbmessers also gefunden:

Der Halbkreis ist = 180° = 180 . 60 . 60″ = 648000″; also

1″ : 1 Lin. = 648000″ : 648000 Lin.

Also wäre der Halbmesser = $\frac{648000}{3,14...}$ Lin. =

2063,69 Fuß.

Wäre im Gegentheil der Krümmungshalbmesser gegeben, so könnte man daraus für einen Neigungswinkel der Libelle von einer oder einigen Sekunden die Bogenlänge BB′, nehmlich die Empfindlichkeit der Libelle berechnen. Dieser Kalkul ist aber auf die Praxis nicht anwendbar, und soll hier nur dazu dienen, die Schwierigkeit in Anfertigung sehr empfindlicher Libellen nach einem vorher bestimmten Gesetz vor Augen zu legen. Die Kunst hat es übrigens in ihrer Gewalt, diese Empfindlichkeit sehr weit zu treiben. Ramsden, Reichenbach u. a. m. haben Libellen geschliffen, die auf 1″ einen Ausschlag von 2 Linien geben. Es mag sie aber Niemand gern brauchen, weil sie schwer in Ruhe zu bringen und außerordentlich zeitraubend beim Beobachten sind. Insgemein begnügt man sich schon mit $\frac{1}{2}$ Lin. Ausschlag auf 5″, wozu ein Krümmungshalbmesser ungefähr = 206 Fuß gehört. Es bleibt dem Leser überlassen, für andere Bedingungen ähnliche Betrachtungen anzustellen. Aus dem Gesagten erhellt deutlich genug, woher sich die Seltenheit genauer und empfindlicher Libellen schreibe. Ist eine solche nach der gebräuchlichen Cylinderform richtig angefertigt, so muß bei horizontalem Stand ihrer Achse die Luftblase genau in der Mitte zwischen beiden Enden der Röhre stehen; diese Stelle wird durch zwei von der Mitte gleich weit entfernte Striche bezeichnet, die am besten ins Glas selbst mit einem Diamant eingeschnitten sind, die Entfernung beider Abtheilungsstriche ist der mittlern Länge

der Luftblase gleich. Da sich indessen die Länge der Blase bei verschiedenen Temperaturen etwas ändert, nehmlich durch Wärme kleiner, durch Kälte vergrößert wird, so sind von jenen beiden Strichen nach den Enden der Röhre hin noch mehrere Abtheilungsstriche in gleichen Abständen, etwa von 1, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ Lin. angebracht, welche zugleich dazu dienen, geringe Neigungen der Libelle gegen den Horizont zu schätzen. Wie viel eine jede solche kleine Abtheilung, nehmlich die Fortrückung der Luftblase bei geringer Neigung von einem Strich zum andern, in Sekunden betrage, wird nicht durch Berechnung nach der Gestalt des Werkzeuges, sondern durch Versuche vermittelst sehr genauer Höhenwinkelmesser, wobei eine Libelle angebracht ist, annähernd gefunden. Gesetzt, die Blase rückte bei einer Neigung der Libelle von 30″ um $7\frac{1}{2}$ Abtheilungen fort, so würde man daraus schließen, daß eine Abtheilung ungefähr 4″ Neigung entspreche, also eine halbe Abtheilung 2″ u. s. w.

Es muß hier noch angemerkt werden, daß die Gestalt einer Libelle nicht durchaus und vollkommen cylindrisch zu seyn braucht, wenn nur der obere bogenförmig ausgeschliffene Theil derselben ganz genau ist; auch muß bei der Verbindung einer Libelle mit einem Winkelmesser, die Luftblase nicht nothwendig die mittelste Stelle der Glasröhre beim horizontalen Stand des Werkzeuges einnehmen, wie wir weiterhin sehen werden. Es ist jedoch die oben erwähnte regelmäßige Gestalt die gebräuchlichere und zu Berichtigung horizontaler Stellungen auch bequemer.

Die cylindrischen röhrenförmigen Libellen haben nach den verschiedenen Absichten, wozu sie dienen, verschiedene Längen und Weiten. Man hat dergleichen von 4 bis 10 Zoll oder wohl noch länger. Die gewöhnlichsten bestehen aus 6 Zoll langen, inwendig 4

bis 5 Linien im Durchmesser weiten Glasröhren, welche etwa bis auf $\frac{1}{8}$ mit reinem Weingeist gefüllt sind. Die Länge der Luftblase beträgt $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll, 2 bis 6 Zoll bei den größern Libellen. Größere Luftblasen sind beweglicher als kleinere; hat die Blase eine beträchtliche Länge, so muß bei einer geringen Neigung der Libelle von der höhern zur niedrigern Seite mehr Flüßigkeit abfließen, als wenn die Blase sehr klein ist; daher wird dann ihre Bewegung bemerkbarer.

Uebrigens sind die Libellen entweder bloße Glasröhren, oder sie sind eingefaßt, besonders in messingnen, oben so weit der Länge nach ausgeschnittenen Röhren, daß man die Luftblase und die Abtheilungen im Glase sehen kann, mit Füßen zum Aufstellen auf eine ebene Fläche, oder mit besondern Trägern zur festen Verbindung mit andern Instrumenten, z. B. Fernröhröhren. Die Libelle ohne Fassung ist der Seite, auf welcher sich die Luftblase befindet, gegenüber ihrer ganzen Länge nach, einige Linien breit, plan und matt abgeschliffen, um sie solchergestalt unmittelbar auf eine glatte Ebene, welche nivellirt, d. h. horizontal gestellt werden soll, z. B. auf das Planglas eines künstlichen Horizontes legen zu können. Sie muß schon beim Mattschleifen genau ajustirt seyn, so nehmlich, daß die Stelle der Luftblase, welche durch zwei oder mehrere Eintheilungsstriche genau bezeichnet wird, für den horizontalen Stand der untern mattgeschliffenen Fläche genau bestimmt ist; insgemein wird die Blase in die Mitte der Libelle versetzt, und sodann versuchsweise die untere horizontale Ebene angeschliffen. Die Anfertigung ist mit Schwierigkeiten verknüpft; indessen hat auch eine solche ungefaßte Libelle vor andern gefaßten mit Stellfüßen versehenen, den entschiedenen Vorzug, daß man sie nicht vor jeder Beobachtung zu berichtigen nöthig hat. Hierbei wird aber als eine unerläßliche

Bedingung vorausgesetzt, daß sowohl die mattgeschliffene Fläche als auch die Fläche, worauf sie zu liegen kommt, vollkommene Ebenen seyen. Beim Nivelliren eines künstlichen Glashorizontes können geringe zwischen beiden liegende Unreinigkeit, ein Staubkörnchen, schon beträchtliche Fehler bewirken.

Die Libelle, wie sie in der Figur 29 erscheint und zum Nivelliren ebener Flächen angewendet wird, ist an beiden Enden in metallene oder hölzerne Fassungen eingekittet; die eine Fassung endigt sich in zwei am besten spitzig zulaufende Füße von gleicher unveränderlicher Länge; der dritte Fuß B läßt sich durch eine sehr genaue Schraubenvorrichtung verlängern oder verkürzen, und dient sonach zur Berichtigung der Libelle.

§. 69.

Berichtigung der Libelle. (Fig. 31).

Soll nun vermittelst derselben eine ebene Fläche, die durch Stellschrauben gegen die Horizontalfläche nach allen Seiten beliebig erhöht oder erniedrigt werden kann, nivellirt und zugleich die Libelle berichtigt, nehmlich so gestellt werden, daß eine Ebene durch ihre drei Standpunkte (Spitzen der Füße) gelegt, horizontal ist, wenn die Luftblase in der Mitte der Röhre zwischen den Zeichen steht, so verfährt man also:

Man stellt die Libelle auf die ebene Platte eines Meßtisches oder künstlichen Horizontes nach der geradlinigten Richtung zweier Schrauben AB (Fig. 31.); auf dem Meßtisch kann man diese Richtung durch eine ausgezogene gerade Linie bezeichnen. Man bringt durch gegenseitige Erhöhung und Erniedrigung der zwei Stellschrauben an der untern Platte (bei gemeinen Meßtischen geschieht dies unvollkommener durch Bewegung in der Nuß) die Luftblase in die Mitte der Libelle. Hierauf

kehrt man dieselbe um; bleibt nun die Blase in der Mitte, so ist die gerade Linie AB zwischen beiden Schrauben horizontal und zugleich die Libelle nach der geforderten Bedingung berichtigt (verificirt). Rückt aber die Blase nach dem einen Ende hin, so ist AB gegen den Horizont geneigt, z. B. in der fehlerhaften Lage A′B′. Man verbessert diesen Fehler, d. h. man bringt die Luftblase wieder in die Mitte M, zur Hälfte durch Erhöhung der geraden A′B′ um den Bogen B′B (oder den Sin. dg), zur andern Hälfte durch Erhöhung der Libelle um B′B (oder dg = mn). Dadurch kommt diese in die Lage abdn, nehmlich die Luftblase in die Mitte M und die Endpunkte der Füße n, d in die Horizontale AB. Wollte man den Fehler durch die Erhöhung der Libelle allein verbessern, so käme sie in die Lage abgm, und die fehlerhafte Lage der Basis, nehmlich A′B′, bliebe unverändert, oder bg und am differirten noch um mn + dg = 2dg. Die Libelle wäre also nicht berichtigt, sondern ihr eines Ende um eben so viel über das andre erhöht, als es vorher erniedrigt war. — Der erwähnte erste Act der Berichtigung reicht indessen selten aus; man muß vielmehr die Libelle wieder umkehren, und im Fall die Blase nicht genau in der Mitte M stehen bleibt, die Berichtigung in ganz gleicher Weise wiederholen u. s. w.

Den Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens glaube ich dem Leser durch die Figur 31 sehr deutlich vor Augen gelegt zu haben, und einer weitern Auseinandersetzung nicht zu bedürfen.

Nachdem nun die gerade Linie AB in der untern Ebene horizontal gestellt, und zugleich die Libelle berichtigt worden, kann es weiter nicht schwer fallen, die ganze Ebene horizontal zu stellen oder zu nivelliren. Ist diese eine vollkommene Ebene, so darf man nur noch eine zweite gerade Linie in ihr, welche AB etwa

rechtwinklich durchschneidet, mit Hülfe der bereits berichtigten Libelle horizontal stellen u. s. w. Auf ganz ähnliche Weise geschieht auch die Berichtigung eines Fernrohrs mit Libelle an einem Winkelmesser oder Nivellirinstrument.

Man sieht ohne mein Erinnern, daß sich so mittelst einer vollkommnen berichtigten Libelle zugleich die geometrische Vollkommenheit einer Ebene prüfen läßt. Die meisten Meßtischplatten halten diese Prüfung nicht aus; doch ist hier ein geringer Fehler nicht von so gefährlichen Folgen, als bei einem Glashorizont, der zu genauer Messung von Höhenwinkeln dienen soll.

Ich will noch kürzlich ein paar bemerkenswerthe Umstände anführen, und damit die Betrachtung dieses Gegenstandes beschließen:

Bei jeder veränderten Stellung der Libelle muß man sie einige Zeit in Ruhe laßen, um den wahren ruhigen Stand der Blase zu erhalten, der bei geringen Neigungswinkeln und bei großer Empfindlichkeit derselben nur allmählig nach längerer oder kürzerer Zeit eintritt. Diesen Moment muß man bei sehr genauen Beobachtungen, besonders astronomischen, schlechterdings geduldig abwarten.

Zweitens, nach sichern Erfahrungen hat die ungleiche Erwärmung der Libellenröhre einen beträchtlichen Einfluß auf den Stand der Blase. Wird ein Stück der Röhre nach einem Ende hin mehr erwärmt als das andre, welches z. B. geschieht, indem das eine den Sonnenstrahlen ausgesetzt, das andre im Schatten ist, so wird das wärmere Stück ein wenig erweitert, und nach dieser Seite hin zieht sich die Luftblase von ihrem mittlern Stande weg. Sogar die Erwärmung durch die nahe daran gehaltene Hand kann eine solche Veränderung bewirken, wie Bohnenberger in seiner Schrift von der geographischen Orts-

bestimmung ꝛc. S. 105. richtig bemerkt. So lassen sich, wenigstens zum Theil, die von Vielen beobachteten Unregelmäßigkeiten der Libellen an Winkelmessern begreifen *). Man muß deswegen die ungleiche Erwärmung der Libelle bei genauen Beobachtungen zu verhüten suchen, um sich das Verdrießliche wiederholter Verification zu ersparen.

§. 70.

Clitometer, Bergwaage. (Fig. 32.)

Um die Neigungswinkel eines abhängigen Terrains (Bergabdachung) mit hinlänglicher Genauigkeit zu bestimmen, um ferner bei einer sehr gründlichen Basismessung, wobei die Maßstäbe gewöhnlich etwas gegen den Horizont geneigt liegen, nach Maßgabe dieser Neigung die schief genommenen Längen auf den Horizont von dem einen Endpunkt des Maßstabes reduciren zu können, mag ein nach Fig. 32. sorgfältig angefertigtes Instrument dienen.

Das Gestelle ECF von gutem Holze hat Aehnlichkeit mit der Setzwaage der Maurer und Zimmerleute. An dasselbe ist mit Schrauben ein eingetheilter Kreis, am besten von Metall, befestigt; für die Praxis wird es hinreichen, wenn die Bogen von 0^0 nach beiden Seiten bis 30^0 oder 45^0 gehen, oder der Bogen AB im Ganzen 90^0 beträgt; für Basismessungen ist

---

*) Von diesen Abweichungen spricht Lalande in seiner Astronomie; auch Delambre in Base du Système métrique etc. Tom. II. p. 190 sq. Delambre leitet sie aber von einer andern Ursache ab, welche ich in der Folge erwähnen will.

es mit 6° bis 10° genug. Anstatt des unvollkommenen Bleilothes bewegt sich am Gestell um C, als Centrum des Bogens AB, eine Alhidade CD, welche bei D einen Nonius als Index hat, der sich längs dem Limbus des Bogens AB fortschieben läßt. Vermittelst des Nonius kann man die Neigungs- (Abdachungs-) Winkel bis auf 1′ oder auch Theile einer Minute erhalten, welches für die allermeisten practischen Fälle eine überflüßige Genauigkeit giebt. An der Alhidade ist bei L eine Libelle so angebracht, daß die Luftblase in der Mitte steht, wenn die Alhidade CD vertikal liegt, und umgekehrt. Zeigt nun der Index der vertikalen Alhidade auf 0° des Limbus AB, so muß eine durch die Basis des Werkzeugs, nehmlich durch E, F gelegte Ebene horizontal, und demgemäß die Länge der Füße CE, CF berichtigt seyn. Wird ein solches genau eingerichtetes Werkzeug mit seinen Füßen E, F auf eine schiefe Fläche in einer Vertikalebene aufgesetzt, so muß begreiflich der Index der Alhidade, um diese in eine senkrechte Lage (die Luftblase an ihr Zeichen in der Mitte) zu bringen, um eben so viel Grade am Limbus fortbewegt werden, als der Neigungswinkel der Abdachung beträgt. Man kann auch die Beobachtung des Winkels durch Umkehrung des Werkzeuges in derselben Vertikalebene wiederholen, um mehr Gewißheit zu erlangen.

Diese Sache ist ungemein leicht zu begreifen; schwerer möchte es aber werden, ein solches Instrument geometrisch genau anzufertigen.

Wird weniger Genauigkeit verlangt, wie z. B. zum Profilzeichnen eines unebenen bergigten Terrains die Abdachungswinkel (Tiefen- und Höhenwinkel) selten genauer als auf 1° oder $\frac{1}{2}$° gemessen werden, so kann man sich mit einer einfachern weniger kostbaren Einrichtung recht gut behelfen. Statt der Alhidade mit Nonius und Libelle kann dann vom Centrum des einge-

theilten Bogens, nehmlich von C, ein sogenanntes Bleiloth herabhängen, dessen dünner Faden am Limbus, bei vertikalem Stand desselben, den Grad des Neigungswinkels abschneidet. So ungefähr war die von Rothe (Beschreibung einer neuen Bergwaage ꝛc. Leipzig, 1758) angegebene Einrichtung. Mayer beschreibt dieselbe und ihren Gebrauch sehr ausführlich in seiner pract. Geom. Bd. 3. S. 530 ꝛc. An der Rotheschen Waage hat zugleich die Entfernung der Füße EF eine bestimmte Länge = 10 Fuß, um bei einer schiefen Lage von EF und dem gegebenen Neigungswinkel = α, ohne weitläufige Rechnung, mittelst der natürlichen Sinustafeln, die Länge EF auf ihre horizontale Projection FG zu reduciren. Es ist hier $FG = 10 . \cos. \text{nat. } \alpha$ in Füßen; ist z. B. der $\angle \alpha = 5^0$, so wird $FG = 10 \times 0{,}9961947 = 9{,}96$ Fuß sehr nahe. Die Berechnung ist bequem, und die Einrichtung zu kleinern Operationen ganz brauchbar.

§. 71.

Astrolabium nach der gewöhnlichen Bedeutung. (Fig. 33.)

Die Einrichtung und der Gebrauch dieses Winkelmessers gründet sich auf den einfachen geometrischen Begriff, daß der Durchmesser (als Absehenlinie) um den Mittelpunkt eines in Grade eingetheilten Kreisbogens sich nach der Richtung zwei entfernter Objecte bewegen läßt, und somit auf dem eingetheilten Rand einen Bogen beschreibt, welcher in Gradmaß gleich ist dem gesuchten Sehewinkel vom Orte der Beobachtung aus nach bestimmten Punkten der entfernten Objecte u. s. w.

Die älteren Astrolabien bestehen entweder aus ei-

nem in halbe, auch Viertelgrade eingetheilten messingenen Halbkreis, oder was auf jeden Fall vorzüglicher ist, aus einem Vollkreis. Um das Centrum C läßt sich vermittelst einer scheibenförmigen Vorrichtung, welche gewiß weit unvollkommener ist als die neuere verbesserte Bewegung um einen genau centrirten Zapfen, eine Alhidade AB mit gewöhnlichen Dioptern (wie beim gemeinen Diopterlineal) herumdrehen. Der Index dieser Alhidade ist an den ältern Werkzeugen ein gemeiner zugespitzter Zeiger, an den neuern hingegen ein Nonius; an den besser gearbeiteten und sorgfältiger getheilten Astrolabien trägt die Alhidade wohl zwei Nonien an beiden Enden A und B, in einer Bogenentfernung von 180°. Diese letztere bessere Construction dient dazu, die Richtigkeit des Instruments zu prüfen, und durch das arithmetische Mittel aus den Angaben beider Nonien dem wahren Werth des gesuchten Winkels näher zu kommen. Daher hüten sich auch Mechaniker, welchen die Hülfsmittel zu einer sehr genauen Theilung und Centrirung abgehen, vor zwei Nonien, und lassen es lieber bei einem bewenden. Einen Nonius aber muß bei dem jetzigen Zustand der practischen Geometrie und der damit verwandten mechanischen Kunst ein jedes noch so einfache Astrolabium haben; die ältern ohne Nonien, welche die Winkel kaum auf Viertelgrade genau geben, müssen ganz verworfen werden, und haben solche zuweilen in Auctionen noch vorkommende Prachtstücke jetzt wirklich nur den Werth von altem Messing.

Außer den Dioptern der Alhidade sind noch zwei andere Dioptern D, E am Rande des Kreises oder in einer geringen Entfernung davon befestigt. Alle vier Dioptern sind doppelt durchbrochen zum Behuf des Vorwärts- und Rückwärts-Visirens. Die Diopternebenen von A, B und D, E müssen nicht allein vollkommen

senkrecht auf die Ebene des Kreises stehen, sondern auch genau durch den Mittelpunkt desselben gehen, Bedingungen, welche die Anfertigung eines guten Astrolabiums, wenn es auch die Winkel nur auf 3 oder 2 Minuten genau geben soll, eben nicht leicht machen. Um der Bequemlichkeit des Transportirens willen richtet man auch zuweilen die Dioptern so ein, daß sie sich abnehmen, oder vermöge besonderer Scharniere niederlegen lassen.

Als eine kostbare, und wie mir scheint, entbehrliche Zugabe haben zuweilen Englische und nach ihnen auch Deutsche Künstler dem Astrolabium noch eine kleinere Boussole, auf der Mitte des Alhidadenlineals beigefügt. Hierdurch kann man den gesuchten Winkel auf doppelte Art, und, was wirklich bei einer Landvermessung oft Nutzen schafft, die Orientirung der visirten Winkel (Linien) gegen den magnetischen Meridian und somit gegen den wahren Meridian annähernd erlangen.

Die Diopternebenen von DE läßt man insgemein durch 0^0 und 180^0 des Gradbogens gehen. Bei einer einfachen Winkelmessung wird dann der Kreis so gedreht, daß die Visirlinie durch die unbeweglichen Dioptern DE nach einem der entfernten Zielpunkte geht, sodann wird der Kreis festgestellt und die Alhidade um ihr Centrum so weit herumgedreht, bis die Visirlinie durch die Dioptern AB nach dem zweiten entfernten Zielpunkte geht. In diesem Falle giebt die Bogengradzahl, worauf der Noniusinder zeigt, gleich unmittelbar den gesuchten Winkel. Es ist klar, daß man mit einem gut construirten Astrolabium die Messung eines terrestrischen Winkels auf eine leidliche Weise auch repetiren kann.

Das Gestelle und die Vorrichtungen zur Bewegung können bei einem solchen Werkzeuge so beschaffen seyn, wie oben beim Meßtisch erinnert worden. Es ist

gut, wenn man den Kreis in jede Lage gegen den Horizont bringen und in solcher befestigen kann; auch in eine schiefe, um Winkel in schiefgeneigten Ebenen als solche zu messen, in eine vertikale Lage, um Höhenwinkel damit zu bestimmen. In letzterm Falle aber muß eine Libelle mit der Alhidade des Astrolabium in Verbindung gesetzt werden. Große Genauigkeit in den Höhenwinkeln darf man jedoch auf diesem Wege nicht erwarten; eine solche kann nur durch eigne Quadranten zu Vertikalwinkeln und in einem möglichst vollkommenen Grade durch einen repetirenden Kreis erhalten werden.

Insgemein wird das Astrolabium nur in der niedern Erdmessung — Feldmeßkunst — zur Bestimmung der Winkel zwischen nahe gelegenen fixen Punkten gebraucht, und zwar will man hier die Winkel sogleich auf den Horizont reducirt erlangen. Zu dem Ende muß die Ebene des Kreises horizontal gestellt werden, wozu man die dosenförmige oder die röhrenförmige berichtigte Libelle gebraucht. Kleine Fehler in dieser horizontalen Stellung sind bei der beschränkten Absicht, welche man mit dem Astrolabium zu erreichen trachtet, als unbeträchtlich außer Acht zu lassen. Aus eben diesem Grunde wollte ich nicht rathen, ein solches Werkzeug mit einem Fernrohr zu versehen. Denn die Kosten für ein solches Instrument würden nicht viel geringer seyn, als für einen vollkommneren kleinern Repetitionskreis — Theodolit —, welcher die Winkel in jedem Fall um sehr Vieles genauer giebt. Zu feinern Operationen der Erdmessung, zu größern Triangulirungen wenn auch nur einer mäßig großen Erdstrecke — kleinern Provinz — sollte fernerhin durchaus kein andres Instrument mehr als ein Theodolit der Art, wie er im folgenden §. beschrieben steht, angewendet werden; das Astrolabium mit gemeinen Dioptern, die Winkelboussole nebst dem

Meßtisch, sollten nur zu kleinern Detailaufnahmen dienen.

Ein eigner Quadrant (Viertelkreis) zu Höhenwinkeln (Vertikalwinkeln), wie er in der practischen Astronomie, als Mauerquadrant, vorkommt, läßt sich in der Erdmessung füglich entbehren. Zur weniger genauen Messung der Höhenwinkel bis auf Minuten dient beim Theodolit ein eigens hierzu angebrachter kleiner Halb- oder Vollkreis; zu ganz genauen Messungen der Art, wie sie z. B. die astronomische Bestimmung der Längen und Breiten auf der Erde verlangt, muß ein guter Bordascher Kreis gebraucht werden. Ein solcher macht andere schwerfälligere Instrumente, z. B. die ältern sehr großen Sectoren, ganz entbehrlich.

§. 72.

Der Theodolit nach der neuesten Form, oder Repetitions-Theodolit. (Fig. 34.)

Dieser Winkelmesser wird gegenwärtig fast überall nach der in München zuerst angewandten Form construirt. Er besteht aus einem Dreifuß (Trépied) ABC (Fig. 34.), dessen Füße sich durch drei Stellschrauben erhöhen und erniedrigen lassen; auf seiner Mitte trägt der Dreifuß eine Centrumhülse a; in dieser bewegt sich das glockenmetallene Centrum (etwas konisch zulaufender Zapfen) eines an der Seite mit doppelten Rändern versehenen Horizontalkreises, worin wiederum der stählerne Zapfen (Centrum) der ebenfalls kreisförmigen Alhidade sich herumdrehen läßt.

Der untere jener beiden Ränder wird von einer Klemme f gehalten, an der sich eine gewöhnliche Mikrometerbewegung vorfindet, und welche zugleich durch

die Stange c mit einer Hülse von rothem Metall zusammenhängt, wodurch ihr eine geringe concentrische Bewegung um die Centrumhülse a gestattet wird.

An dieser Hülse von rothem Metall ist das Versicherungsfernrohr b befestigt, welches sich in der Vertikalebene etwas auf und niederbewegen läßt, und eben so das Knie d, welches mittelst einer Feder und der Kopfschraube e festgepreßt gegen einen der Füße A, B, C gehalten wird. Wenn man daher diese Kopfschraube e dreht, so kann man das Versicherungsfernrohr und die Klemme an der Stange c mikrometerartig um die Achse bewegen, und sowohl den Nullpunkt des Kreises als ein entferntes Object auf den Kreuzfaden des Versicherungsfernrohres einstellen.

Die kreisförmige Alhidade hi trägt mittelst der Stützen (Träger) k eine Queerachse, welche aus zwei mit den Grundflächen zusammen verbundenen Kegeln besteht; durch diese ist in senkrechter Richtung gegen die Querachse der Kegel das obere eigentliche Beobachtungsfernrohr mn durchgesteckt; bei g führt der Alhidadenkreis zugleich eine Klemme mit der gewöhnlichen Mikrometerschraube zu sanften Bewegungen.

An dem einen Ende trägt die Achse einen Vertikalkreis H zur Messung der Höhen- und Tiefenwinkel, bis zu der Genauigkeit von 1 oder $\frac{1}{2}$ Minute. Der zugehörige Nonius ist seitwärts am Träger befestigt. Sie kann mittelst eines Aufsatz-Niveau's (Libelle) horizontal gestellt werden *), und ruht an beiden Seiten in Pfannen von der Form eines Y, gleichwie bei einem

---

*) Die Verbindung einer Libelle mit dem Fernrohr eines Winkelmessers und die Berichtigung ihrer gegenseitigen Lage geschieht so, wie am Niveau. Siehe §. 81. 82.

Passagen-Instrument. Solche Pfannen oder Unterlagen heißen bei den Engländern Y's; ein cylindrischer Zapfen, so wie auch ein Fernrohr, ruhen in solchen Y's, welche Tangenten gegen jene bilden, offenbar fester und sichrer, als in den sonst üblichen runden kreisförmigen Pfannen. Die Form der Träger und des Fernrohrs wird zum Theil aus der Seitenansicht (Fig. 34.) deutlich werden.

Die Forderungen, welche sich an einen solchen Theodolit machen lassen, sind hauptsächlich diese:

Der Kreis muß genau getheilt und centrirt seyn; da der Alhidadenkreis vier Nonien, in Entfernungen von 90°, oder wenigstens zwei in der Entfernung von 180°, führt, so läßt sich die Richtigkeit der Theilung und Centrirung leicht prüfen.

Das obere Fernrohr muß sich genau in einer Ebene bewegen, welche senkrecht auf die Kreisebene durch den Mittelpunkt derselben geht, eine Bedingung, die durch die angebrachten Correctionsschrauben leicht zu erhalten und unerläßlich ist, weil sonst in die gemeßnen Horizontalwinkel beträchtliche Fehler kommen. Daher muß auch die Wellenachse parallel zur Kreisfläche seyn.

Da der Theodolit mehrentheils zur Bestimmung von Horizontalwinkeln unmittelbar, ohne vorgängige Reduction, angewendet wird, so muß der Hauptkreis vollkommen horizontal gestellt werden können. Dies geschieht mit Hülfe der Fußschrauben und der oben erwähnten Aufsatz-Libelle. (Siehe Libelle oben).

Bei gewöhnlichen weniger genauen Messungen bringt indessen, wie wir in der folgenden Abtheilung sehen werden, eine geringe Neigung der Kreisfläche gegen den Horizont — etwa von 1 oder $\frac{1}{2}'$ — keinen beträchtlichen Fehler in die gemessenen Horizontalwinkel; bei Arbeiten hingegen, die schon mehr ins Große gehen, muß man in dieser Hinsicht größere Sorgfalt anwenden.

Die Art, mit diesem ganz vortrefflichen Instrumente, welches zu allen terrestrischen Aufnahmen in jeder Beziehung das brauchbarste und selbst dem Bordaschen Kreise (dieser eignet sich mehr zu astronomischen Bestimmungen) vorzuziehen ist, Horizontalwinkel zu nehmen, besteht kürzlich in Folgendem:

Der Theodolit wird auf eine sehr feste Unterlage horizontal aufgestellt, und das untere Versicherungsfernrohr auf irgend einen Punkt des Horizontes, der ein deutliches Bild giebt, gerichtet.

Alsdann wird die Alhidade mit dem obern Fernrohr auf den Kreis so gestellt, daß der Nullpunkt (o Grad) desselben auf den Anfangspunkt eines der zwei oder vier Nonien einsteht. Man dreht nun, nachdem man die Klemme f geöffnet, zugleich Kreis und Fernrohr auf das entfernte Object, nehmlich einen bestimmten Punkt desselben, welcher den Anfang der Messung machen soll. Die feinere Einstellung auf den Mittelpunkt des Fadenkreuzes im Fernrohr geschieht bei geschlossener Klemme f mittelst der daran befindlichen Mikrometerschraube.

Steht dies alles so fest, so richtet man das obere Fernrohr bei ausgelöster Klemme g auf den zweiten entfernten Gegenstand; die genaue Einstellung geschieht auch hier bei geschloßner Klemme g mittelst der an ihr befindlichen Mikrometerschraube.

Nach dieser ersten Operation wird der Nonius der Alhidade den einfachen Winkel angeben; zur Controlle kann man auch die Bogen bemerken, welche die übrigen Nonien dabei beschrieben haben. Zu größerer Sicherheit nimmt man aus den Angaben aller (2 oder 4) Nonien, wenn sie um eine sehr geringe Differenz abweichen sollten, das arithmetische Mittel.

Löst man nun die Klemme f auf, so kann man das obere Fernrohr zugleich mit dem Kreis wiederum

auf das erste Object einstellen, von dem vorhin gefundenen Winkelpunkt der Alhidade ausgehend nochmahls auf das zweite Object einrichten, und sonach das doppelte Bogenmaß des gesuchten Winkels erlangen. Man kann überhaupt diese einfache Repetition so oft wiederholen, als man will, und bei gehöriger Vorsicht sich dem wahren Winkel gleichsam ins Unendliche nähern, wie im §. 62 bei der Repetition der Winkelmessung erklärt worden ist.

Höhen- und Tiefenwinkel lassen sich mit dem kleinen Vertikalkreis dieses Theodoliten ungefähr bis auf $\frac{1}{2}$ Minute genau messen, welches zu den allermeisten geodätischen Arbeiten völlig ausreicht. Die Vertikalität des Höhenkreises, ein Haupterforderniß bei Höhenmessungen, erlangt man hier mit großer Sicherheit, da der Kreis rechtwinklicht auf der Wellenachse abgedreht worden, und letztere mittelst einer sehr empfindlichen Hakenlibelle horizontal gestellt, auch während einer Beobachtung immer berichtigt werden kann. Zu genauern astronomischen Höhen- (Zenithdistanzen) Bestimmungen muß man ein andres Instrument, z. B. einen Bordaschen Kreis, gebrauchen.

Einfachere Theodoliten, als der hier beschriebene, etwa ohne Repetition und Versicherungsfernrohr, zu Triangulirungen vom zweiten oder dritten Range brauchbar, lassen sich nun gar leicht gedenken und mit weniger Kostenaufwand aufführen.

Einen Repetitionstheodolit, sehr ähnlich dem hier angegebenen, nebst zwei andern einfachern, angefertigt von Rößler in Darmstadt, beschreibt Eckhardt in einer kleinen daselbst 1813 erschienenen Broschüre.

Theodoliten, besonders nach Ramsden's Erfindung, sehr zweckmäßig jedoch ohne Repetition, wie solche noch jetzt in England mehrentheils angewendet werden, findet man beschrieben und abgebildet in

Adam's Schrift: Geometrische und graphische Versuche ꝛc.

§. 37.

Bordascher Kreis. (Fig. 35.)

Dies etwas zusammengesetzte Instrument ist in einer schiefgeneigten Lage in unsrer Zeichnung (Fig. 35.) so vorgestellt, wie es seinen wesentlichen Theilen nach bisher gewöhnlich gebraucht worden, unter andern auch bei der französischen Gradmessung durch Delambre und Méchain.

Es wird an einer kurzen Anzeige der wesentlichen Theile dieses Winkelmessers genügen; eine detaillirte Beschreibung jedes einzelnen Theils, jeder Schraube u. s. w. würde die Grenzen dieses Werkes überschreiten. Auch wird die Phantasie des Lesers nach der Figur leicht ergänzen, was in der Beschreibung etwa unberührt geblieben.

A ist ein aus einem ganzen Stück Messing genau bearbeiteter Kreis mit einem, auf eingelegtem Silber, eingetheilten Limbus. Dieser Kreis wird durch Speichen festgehalten, die vom Mittelpunkt gegen den Rand hin in der Breite abnehmen. Er ist durchaus gleich dick, so daß seine beiden Flächen zu einander parallel laufen. Die Speichen vereinigen sich in der Mittelpunktsplatte. Der Durchmesser des Kreises beträgt 12 bis 16 Zoll; bei dieser Größe können die Theilung des Limbus und die Nonien so eingerichtet seyn, daß man die Winkel unmittelbar ohne Repetition auf 10″ oder selbst auf 5″ genau erhält.

Um den Kreis lassen sich mittelst scheibenförmiger Centrumplatten, wie man solche auch an Astrolabien ꝛc. sieht, oberhalb und unterhalb zwei Alhidaden mit auf-

gesetzten Fernröhren bewegen, deren Achsen in jeder Lage des Kreises parallel zu dessen Ebene bleiben. Beide Alhidaden lassen sich an dem ausgedrehten, gleichsam in zwei Limben getheilten Rande des Kreises mit Klemmschrauben feststellen. Der Kreis nebst seinen Alhidaden kann mittelst einer stählernen Achse in einer starken messingenen Hülse B sanft und stetig umgedreht und so nach jedem Azimuth gerichtet werden. Die Achse steht unterhalb mit einer trommelförmigen mit Blei ausgegossenen Vorrichtung c in einer solchen Verbindung, daß durch eine Schraube ohne Ende, welche in den gezahnten Rand der Trommel eingreift, eine langsame Drehung derselben möglich wird.

Die obere Alhidade trägt an beiden Enden Nonien *), deren Bogen concentrisch mit dem Limbusbogen sind. Die Gestalt dieser gewöhnlich facettenartig zugetheilten Nonien, die Vorrichtung zur groben und sanften Bewegung der Alhidade mit ihren Nonien längs dem eingetheilten Limbus, so wie zur Feststellung derselben, muß man an irgend einem andern guten Winkelmesser, z. B. an einem Sextanten, nachsehen.

O und U sind zwei an Größe und Gestalt gleiche achromatische Fernröhre, durch besondere Ansätze auf die Alhidaden gestellt, mit Kreuzfäden zum Visiren nach einem bestimmten Punkt eines entfernten Objectes. Die Achse des obern Fernrohrs O liegt nach der neuern Construction in einer durch den Mittelpunkt des Kreises senkrechten Ebene, und ihr Umdrehungspunkt senkrecht über den Kreismittelpunkt; nach der ersten von Borda

---

*) Man bringt auch wohl 4 Nonien an; ich denke aber, zwei könnten ausreichen, und durch ihre Reibung den Limbus und dessen Theilung nicht so schnell abnutzen, als es vier thun.

ausgeführten Bauart war das obere Fernrohr etwas excentrisch. Das untere Fernrohr U muß, wie man leicht begreift, etwas excentrisch seyn, nehmlich seine Achse liegt ungefähr um 1,5 Zoll vom Kreismittelpunkt entfernt. Die Achsen beider Fernröhre müssen am Bordaschen Kreise mit der Kreisebene parallel seyn. Das Fadenkreuz ist auf die Oeffnung einer kleinen Röhre ausgespannt, welche man innerhalb der Fernröhren durch eine besondere Vorrichtung etwas rückwärts oder vorwärts bewegen, um ihre Achse drehen, und somit das Fadenkreuz genau in den Brennpunkt bringen kann. Zu diesem Kreuz, dessen Durchschnittspunkt in der Sehachse des Fernrohrs liegt, gebraucht man Silberfäden so fein als möglich oder noch besser Spinnefäden um die Parallelaxe beim Visiren so weit als nur irgend möglich zu vermindern.

Die Einrichtung der Fernröhre ist astronomisch; man sieht damit die Bilder umgekehrt, welches bekanntlich bei Beobachtungen nichts schadet. Um das deutliche Sehen des anvisirten Objectes und des Fadenkreuzes zu erlangen, läßt sich, wie gewöhnlich, die Okularröhre gegen die Objectivröhre gehörig verschieben.

Ueber den Nonien der obern Alhidade sind Mikroskope aufgestellt, welche eine mit dem Kreise parallele Bewegung und eine solche Verrückung gestatten, daß man nicht bloß die Theilungen der Nonien und des Limbus deutlich ablesen, sondern auch die Mikroskope über die ganzen Noniusbogen hinführen kann.

Die Hülse B der stählernen Achse ist mit einer gleich starken Welle in Form eines rechtwinklichten Kreuzes fest verbunden. Diese Welle ruht an beiden Enden mit ihren sorgfältig bearbeiteten Zapfen in ähnlichen Pfannen auf den Trägern T. Durch die Umdrehung dieser Welle um ihre Achse kann man demnach den

obern Kreis mit seinen Fernröhren in jede gegen den Horizont geneigte Lage bringen. Es muß aber die Achse dieser Welle gegen die Achse des Kreises genau rechtwinklicht gestellt seyn. Um den Kreis in irgend einer schiefgeneigten Lage fest erhalten zu können, hat man an einem Ende der Welle einen kleinen Quadranten befestigt, dessen Centrum in der Wellenachse liegt, und dessen Bogen bei der Drehung der Welle nahe am Träger concentrisch mit fortgeht. Durch eine besondre Fingerschraube S läßt sich der Quadrant, folglich auch der obere Kreis in jeder Lage feststellen. Auch bringt man wohl bei dem Quadranten eine Schraube ohne Ende zu feinern Bewegungen an, welche bei Azimuthalbeobachtungen und bei der Stellung des Kreises in eine Vertikalebene große Bequemlichkeit verschafft.

In die gezahnte Scheibe am untern Ende der Trommel greift eine Schraube ohne Ende ein, vermittelst deren sich der obere Kreis mit seiner Achse in der Hülse B sehr fein und sanft herumdrehen läßt; man kann aber auch auf eine ähnliche Weise, wie oben beim Meßtisch gezeigt wurde, die Schraube so weit von der gezahnten Scheibe entfernen, daß sie nicht in dieselbe eingreift; dann läßt sich der Kreis frei und geschwinder um seine Achse drehen.

Der gabelförmige Träger TT wird mit seinem untern Queerstück auf einer starken messingenen etwas hohen Säule befestigt; hierzu dienen ein besonderer Ansatz und die Fingerschrauben HH. Demzufolge besteht das ganze Instrument aus zwei Theilen; der obere mit seinem gabelförmigen Träger läßt sich beim Verpacken und Transport vom untern abnehmen. Der Träger muß genau über der Mitte des Fußes zu liegen kommen, aus Gründen, die sogleich in die Augen fallen.

Der Fuß der Säule K ruht in der Mitte eines eingetheilten, am Rande gezahnten Kreises, welchen

man insgemein Azimuthalkreis nennt. Um den Mittelpunkt desselben läßt sich mittelst eines sehr genau gearbeiteten Centrumzapfens die Säule K, also auch der obere Kreis, herumbewegen und nach jedem Azimuth stellen. An der Grundfläche der Säule ist, wie man in der Zeichnung sieht, die Alhidade des Azimuthalkreises befestigt. An einem Ende der Alhidade befindet sich ein Nonius mit Mikrometerschraube, welche in den gezahnten Rand des Kreises eingreift, um der Säule eine sanfte Bewegung zu geben; man kann diese Schraube auch auslösen, wenn man die Säule schneller herumdrehen will. Am andern Ende der Alhidade dient eine Fingerschraube zum Feststellen derselben und der Säule. Die Theilung und der Nonius am Azimuthalkreis geben die Azimuthalwinkel auf 1′ oder auch noch genauer.

Der untere Kreis und das ganze Instrument stehen endlich in fester Verbindung mit einem Fuß von drei starken Aermen, durch deren Enden drei vertikal stehende Stellschrauben gehen. Da diese etwas grobe Gewinde haben, und bei einer geringen Drehung den Kreis schon bedeutend in seiner Lage verändern können, so ist, wenigstens unter eine der Stellschrauben, noch ein kleiner Hebel mit einer feinern Schraube angebracht, um nach einer gröbern Bewegung durch die großen Stellschrauben noch eine sanftere unmerklichere Erhöhung oder Erniedrigung des ganzen Instruments erreichen zu können

Da der Bordasche Kreis sehr häufig zur Messung von Vertikalwinkeln, Zenithdistanzen, angewendet, und hierbei die Methode der doppelten Repetition (§. 62.) mit Vortheil ausgeführt wird, so müssen zwei Libellen mit ihm in gehörige Verbindung gesetzt werden, die einige längere (ungefähr von 8 Zoll) mit dem untern Fernrohr, die zweite kleinere mit der Achse des obern Kreises. Die Figur 36. stellt den obern

Kreis in einer Vertikalebene und die gewöhnliche Verbindung der Libelle mit dem untern Fernrohr vor. Dieses dient hier bloß als Libellenträger; die Luftblase wird bei Bestimmung von Zenithdistanzen auf die Mitte zwischen ihre Zeichen eingestellt, in dem Augenblick, wo der Beobachter den Kreuzfaden des obern Fernrohrs auf ein entferntes (himmlisches) Object richtet. Das Nähere hierüber in der sechsten Abtheilung, wo von den Messungen mit dem Bordaschen Kreise gesprochen werden soll. Es ist nicht durchaus nothwendig, die Libelle gegen das Fernrohr so zu ajustiren, daß die Achse des letztern beim mittlern Stand der Luftblase horizontal werde.

Die Figur 37 deutet den obern Kreis in verkikaler Lage, von der Seite betrachtet, mit seiner Achse in der Hülse B ꝛc. an. Mit dieser Achse ist eine zweite kleinere Libelle (Queerniveau) durch Scharnier und Stellschraube so verbunden, daß sie sich etwas erhöhen oder erniedrigen läßt. Diese kleine Libelle dient, beurtheilen zu können, ob der einmahl mit Hülfe eines feinen Bleilothes vertikal gestellte Kreis während einer Beobachtung diesen Stand unverändert beibehält. Die Libelle kann dahin berichtigt werden, daß jene vertikale Lage des Kreises immer durch sie angezeigt wird. Davon ein Näheres in der sechsten Abtheilung.

Das bisher Gesagte wird, wie ich glauben darf, genügen, um solchen Lesern, die noch keinen Bordaschen Repetitionskreis gesehen, einen deutlichen Begriff zu verschaffen von den wesentlichen Bestandtheilen desselben und den Forderungen, die man an ein solches Werkzeug zu machen hat. Was die Bewegungen desselben anlangt, so folgt aus der Beschreibung, 1) daß beide Fernröhre gedreht oder befestigt werden können, jedoch unabhängig von einander; 2) daß der obere Kreis um seine Achse gedreht werden kann, indem die Säule K

fest steht; 3) daß die Säule K mit den Theilen, welche sie trägt, um den Mittelpunkt des Azimuthalkreises beweglich ist; 4) daß eine gewisse Neigung des obern Kreises nach zwei verschiedenen Lagen vermittelst der Wellenachse des gabelförmigen Trägers (Gabel) und auch durch die Fußschrauben bewirkt werden kann. Mit allen diesen Bewegungen muß man sich sehr vertraut machen, wenn man Winkel genau und schnell mit dem Bordaschen Kreis will bestimmen können. Die Manipulationen, Vorsichtsregeln, Berichtigungen bei Winkelmessungen der Art sollen in der sechsten Abtheilung dieses Werkes näher erörtert werden.

Um dem ganzen Instrument einen sehr festen Stand ertheilen zu können und die schwankenden oder zitternden (oscillirenden) Bewegungen desselben zu verhüten, ist es nöthig, daß dasselbe sehr stark gebaut sey, welches besonders von der Säule und dem Fuß gilt, worauf sie steht. Ich halte einen Fuß mit drei geschweiften sehr massiven Aermen, wie sie die altenglischen Instrumente, z. B. Fernröhre, haben, für zuverläßiger, als den Dreifuß, wie er in unsrer Figur der gewöhnlichen Bauart gemäß erscheint. Auf einem Trépied mit geschweiften Füßen und Stellschrauben ruht auch wirklich ein 12zölliger Bordascher Kreis aus der Werkstatt von Reichenbach, welchen ich eben vor mir habe.

Dieser Kreis weicht auch in seiner übrigen Construction sehr bedeutend von der sonst gebräuchlichen, hier beschriebenen, ab. Ein ganzer Alhidadenkreis mit 4 Nonien bewegt sich genau anschließend innerhalb des Limbuskreises, so daß die Flächen der Nonien und des Limbus in eine Ebene fallen. Diese Einrichtung ist an sich die richtigere und zum genauen Ablesen der Winkel besser geeignet, als die sonst gewöhnliche Form und schiefe Lage der Nonien; es läßt sich aber dagegen sa-

gen, daß Staubkörnchen, welche zwischen die an einander concentrisch laufenden Ränder des Limbus- und Alhidaden-Kreises möglicherweise kommen können, nach und nach diese Ränder etwas abzuscheuern vermögen u. s. w. Statt einer Trommel, als Gegengewicht, befinden sich am Reichenbachschen Kreis deren zwei; steht der obere Kreis zur Beobachtung von Zenithdistanzen in einer Vertikalebene, so haben die beiden Trommeln mit ihren Trägern gegen den untern Azimuthalkreis, der hier höher gestellt ist wie sonst gewöhnlich, eine solche Lage, daß man mit den Augen nicht bequem genug an den Index des untern Kreises gelangen kann; ein Uebelstand, der mir sehr auffält, und der sich durch eine etwas niedrigere Stellung des Azimuthalkreises wohl vermeiden läßt. Die Einrichtung der Drehungs-Achsen ist übrigens nach den besten Principien ausgeführt, wie man solche zum Theil auch in der früher erwähnten Schrift von Tabor angedeutet findet. Das Ganze ist vortrefflich gearbeitet, und kann, wenn dem erwähnten Fehler noch abgeholfen wird, wie ein genau angefertigter Bordascher Kreis, nach der oben beschriebenen Construction, recht gut die Stelle eines tragbaren Observatorium vertreten. Das Gewicht eines solchen Instrumentes wird aber nach der Natur der Sache immer viel beträchtlicher seyn müssen, als dasjenige einfacherer Winkelmesser. Auch muß bei allen guten Beobachtungen für eine äußerst feste, nicht wankende noch oscellirende Unterlage, wozu ein großer Granitblock sich immer am besten eignete, gesorgt werden.

§. 74.

Theorie des Spiegelsextanten.

(Fig. 38. 39. 40.)

Alle Winkelmesser, bei welchen durch gemeine Dioptern oder Fernröhre ein unmittelbares, directes Visiren nach zwei entfernten Objecten Statt findet, um das Maß des Winkels zu finden, den sie mit dem Ort (Auge) des Beobachters bilden, bedürfen eines festen Standes, irgend eines Stativs, Fußes mit unbeweglicher Unterlage. Zu dieser Klasse gehören alle bisher beschriebenen Winkelmesser, auch die repetirenden Kreisinstrumente.

Es finden sich aber oft Hindernisse, dem Winkelmesser einen festen Stand zu geben und ihn mit einem Stativ zu verbinden; man sieht wohl, daß dieser Fall besonders auf der See Statt findet, wo die Bestimmungen der Längen und Breiten durch eine astronomische Winkelmessung so äußerst wichtig sind.

Wahrscheinlich ist man also wohl schon in frühern Zeiten auf die Erfindung eines Winkelmessers bedacht gewesen, welcher einen festen Stand und daher ein Stativ entbehrlich machen könnte.

Die Erfindung eines solchen, hauptsächlich zu See, aber auch auf dem festen Lande sehr brauchbaren Instrumentes gebührt dem Engländer Hadley; denn wiewohl nach dem Bericht eines Englischen Schriftstellers Ludlam schon Newton die Idee zu einem reflectirenden Quadranten in einer Handschrift angegeben hat, so hat doch zuerst Hadley nach seinem eignen Ermessen die Sache wirklich in Ausführung gebracht. Die Construction und der Gebrauch des von ihm erfundenen Winkelmessers gründet sich auf die zweifache Reflexion eines Licht- oder Seh-Strahls vermittelst zweier

Spiegel. Man kann daher solche Winkelmesser, welche den einen Visirstrahl nach einem von den entfernten Objecten indirect durch Spiegelreflexion, den zweiten aber direct ohne Reflexion geben, katoptrische oder vielmehr katoptrisch = dioptrische nennen, wenn die vorerwähnten bloß dioptrische heißen.

Uebrigens führt ein solches Spiegelwerkzeug die verschiedenen Benennungen eines Spiegeloctanten, oder Spiegelsextanten, Spiegelquadranten oder auch eines Spiegelkreises, je nachdem der dazu gehörige Limbusbogen entweder 45° oder 60° u. s. w. ist. Das zuerst von Hadley angegebene und ausgeführte (im J. 1731) Instrument der Art war ein Octant von Holz, später von Messing. Solche hölzerne Octanten werden noch jetzt zum Theil von Englischen Seefahrern, in einer Größe von 10 Zoll oder mehr im Halbmesser, angewendet. Die dauerhafteren weniger biegsamen aus Messing, wie unsere Spiegelsextanten zu Lande zu seyn pflegen, verdienen den Vorzug.

Um die vollkommenere, besonders in Hinsicht der Theilung richtigere Construction der Octanten und Sextanten hat sich besonders der große Englische Künstler Ramsden sehr verdient gemacht. Sie werden gegenwärtig nicht allein in England, sondern auch in Deutschland von Künstlern, die mit genauen Theilmaschinen nach Ramsden ausgerüstet sind, in großer Vollkommenheit und Eleganz angefertigt. Indessen sind sie, auch die aus berühmten Englischen Werkstätten eines Troughton, Cary ꝛc. hervorgehenden nicht ausgenommen, selten von allen Fehlern der Theilung und der Centrirung ganz frei; man muß folglich, wenn man einen guten Sextanten zu größern genauern Vermessungen in Ermangelung eines repetirenden Theodoliten, oder zur Beihülfe, gebrauchen will, immer zuvor

die nicht mehr abzuändernden Fehler des Werkzeuges auszumitteln trachten, um sie bei Beobachtungen in Rechnung zu bringen. Diese Prüfung und Correction kann in der Art geschehen, wie die früher angezeigte von Benzenberg ist. Es können aber auch am Sextanten andere Fehler Statt finden, denen sich durch besondere Vorrichtungen abhelfen läßt.

Man findet in mehreren Schriften die theoretische Erklärung und Beschreibung des Spiegelsextanten; in keinem Buche aber so vollständig und gründlich, als in dem Werke von Bohnenberger:

Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten, mit Kupfern. Göttingen 1795.

Ich rathe jedem Leser, welcher sich einen Sextanten anschaffen, und damit operiren will, sich jenes Werk gleichzeitig mit anzukaufen und fleißig zu studiren. In dieser Voraussetzung glaube ich hier die Theorie und Beschreibung des Spiegelsextanten etwas kurz zusammenfassen zu dürfen.

Die unterscheidende Eigenthümlichkeit der Winkelmesser mit Spiegeln überhaupt gründet sich auf diesen optischen Satz:

Wenn ein Lichtstrahl auf eine ebene Spiegelfläche auffällt, so wird er nach der entgegengesetzten Seite (Richtung) unter demselben Winkel zurückgeworfen (reflectirt), unter welchem er auffiel, oder der Einfallswinkel und Zurückwerfungswinkel sind gleich; und zwar fallen die beiden Ebenen, welche man sich durch den einfallenden und zurückgeworfenen Lichtstrahl senkrecht auf die Spiegelfläche denkt, in eine Ebene zusammen. Die Erklärung dieser gewissen Thatsache versucht die Physik zu geben.

Hieraus fließen für die Theorie des Sextanten

folgende Sätze, die ich zur schnellern und deutlichern Uebersicht in wenig Worte mit abgekürzten Bezeichnungen in den Figuren zusammendränge:

1) AB und CD (Fig. 38.) mögen zwei ebene Spiegel vorstellen, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, und zwar sollen AB, CD die Durchschnittslinien der Spiegel in der Ebene bedeuten u. s. w. Stehen nun die spiegelnden Flächen einander zugekehrt und parallel, so wird ein unter einem schiefen (nicht rechten) Winkel auf den Spiegel CD auffallender Lichtstrahl LK unter gleichem Winkel nach der zweiten Spiegelfläche reflectirt u. s. w. In diesem Falle werden der auffallende und der zuletzt reflectire Lichtstrahl zu einander parallel seyn, und zwar liegen beide in einer durch die Spiegelflächen senkrechten Ebene. Der Beweis dafür ist ganz elementarisch. Es wird aber hierbei angenommen, daß der Spiegel AB eine solche Lage gegen CD habe, daß der reflectirte Strahl KH auf seine Fläche treffen kann u. s. w.

2) In Figur 39 stellen wieder AB, CD zwei Spiegel in der Lage wie in 1) vor; jedoch sind ihre Ebenen gegen einander geneigt; der Neigungswinkel ist, wie man sogleich erkennt, AEC = n. Der zuerst auffallende Strahl LK und der zuletzt reflectirte HI schneiden einander, gehörig verlängert in I unter dem Winkel LIH = o. Es ist immer dieser Winkel o doppelt so groß, als der Neigungswinkel n beider Spiegel. Der Beweis dafür ist nach den ersten Sätzen der Elementargeometrie, mit möglichst kurzer Bezeichnung also zu führen:

$$m = x + o$$

$$p = y + n, \text{ auch } r = v,$$

$$\text{also } p - r \text{ oder } m = y + n - v,$$

$$\text{daher } x + o = y + n - v,$$

$$\text{folglich } o = y - x + n - v = z + n - v$$

Nun ist $n = u - v$ und $z = u$, daher $z - v = n$, mithin $o = 2n$.

Da der Winkel o demzufolge unveränderlich bleibt, wenn sich der Neigungswinkel n beider Spiegel nicht verändert, so begreift man leicht, daß der reflectirte Strahl HI seine Richtung oder Lage gegen den einfallenden LK beibehält, wenn man beide Spiegel auch um die Drehungspunkte K, H zu gleicher Zeit so bewegt, daß ihr Neigungswinkel n unveränderlich derselbe bleibt.

3) In Figur 40 stellen wieder unter denselben Bedingungen, wie vorher, AB und CD zwei ebene Spiegel vor. Das kleine Planglas mit parallelen Flächen sey zur Hälfte, KD, belegt, also reflectirend (spiegelnd), die andre Hälfte CK unbelegt, durchsichtig. AB sey ein zweiter ganz belegter Spiegel, dem kleinern Spiegel CD nahe. Man denke sich CD in einer festen gegen eine Ebene senkrechten Lage, den größern Spiegel AB hingegen um ein fixes Centrum H beweglich, doch so, daß er immer in jeder Stellung senkrecht auf derselben Ebene bleibt, auf welcher CD steht.

L bezeichne einen fixen unveränderlichen Punkt, das Auge eines Beobachters oder den Visirpunkt durch ein gemeines oder Fernrohrdiopter; LKI einen dioptrischen Visirstrahl, der durch den unbelegten Theil von CD in seinem Mittelpunkt K nach einer unveränderlichen Richtung LI durchgeht. LK bedeute zugleich einen Lichtstrahl, der von L nach dem belegten Theil von CD bei K geht, oder umgekehrt von K nach L reflectirt wird. Die Richtung der Visirlinie LK, so wie die Stellung des Spiegels CD, seyen unveränderlich, folglich auch der Winkel $LKD = CKH$ unveränderlich. Gesetzt also, ein Lichtstrahl LK fiele auf DK in K unter dem Winkel LKD, so würde er unter gleichem Winkel auf den Spiegel AB reflectirt

werden, wenn letzterer eine schickliche Lage gegen CD hat; der reflectirte Strahl KH würde hierauf zum zweiten Mahl von AB unter dem Winkel AHI = BHK zurückgeworfen werden, und, wenn BHK kleiner als 90°, verlängert LKI in I schneiden. Fiele umgekehrt ein Lichtstrahl von I auf AB in H, so würde er in der Richtung HK auf den Spiegel DK fallen, und von hier zum zweiten Mahl reflectirt in der Richtung KL nach L gelangen. So begreift man, wie ein Auge in L einen sichtbaren (leuchtenden) Punkt I von einem entfernten Object zweimahl in der Mitte oder Scheidungslinie des Glases CD sieht, einmahl direct (dioptrisch) durch das unbelegte Glas, das zweite Mahl indirect (katoptrisch) durch doppelte Reflexion der beiden Spiegel. Da man nun beide Bilder vom Punkte I in derselben gleichen Richtung sieht, so fallen sie zusammen; das Spiegelbild muß, durch zweimahlige Reflexion geschwächt, nothwendig immer weniger Lichtintensität besitzen als das directe dioptrische, welches bei seinem Durchgang durch das unbelegte Glas weit weniger an Lichtstärke verliert.

Nach No. 2) muß auch hier der Winkel bei I doppelt so groß seyn, als der Neigungswinkel beider Spiegel. Man wird ohne mein Erinnern durch eine simple geometrische Construction begreifen, daß, je weiter der Gegenstand I in der Direction LI von den Spiegeln sich entfernt, desto mehr sich der Winkel HIL vermindern, und also auch die Lage der Spiegel AB und CD gegen einander der parallelen annähern müsse. Ist I ein Himmelskörper, so kann man den Winkel bei I, als folglich auch den Neigungswinkel der Spiegel als Null ansehen; dies ist auch schon bei weit entlegenen terrestrischen Objecten, Thurmspitze ꝛc. sehr annähernd richtig. Hierauf gründet sich die Methode, mittelst des Visirens nach einem sehr entlegenen sichtbaren

Object (Punkt), die beiden Spiegel eines Sextanten parallel zu stellen, und den sogenannten Inderfehler zu bestimmen, wie weiter unten gezeigt wird.

4) Der um den Mittelpunkt H bewegliche Spiegel (Inderspiegel beim Sextanten) werde aus der Lage AB, (Fig. 40.), in welcher der entfernte Punkt I zweimahl in der Direction LK gesehen wird, wie in 3) erklärt worden, in die Lage ab gedreht. Da KH seine Lage nicht verändert, weil $\angle$ LKD = CKH constant sind, so wird der Winkel BHK um den Winkel bHB verändert (vermindert), um welchen sich der Spiegel in seiner Stellung verändert hat; der Reflexionswinkel wird also jetzt bHK. Um eben den Winkel bHB muß nothwendig auch der zweite Reflexionswinkel AHI verändert (vermindert) werden. Da dieser aber durch die Drehung des Spiegels AB in die Lage ab um den Winkel AHa = bHB vergrößert worden, so muß dieser vergrößerte Winkel aHI um den doppelten Winkel bHB oder 2mn in Gradbogen = pq° vermindert werden, so daß nun Winkel aHF = bHK wird, folglich der Lichtstrahl HI in die Lage HF übergeht. Wofern also in der Direction HF bei dieser gegenseitigen Stellung beider Spiegel ein sichtbarer Punkt F liegt, so wird sein Bild durch doppelte Reflexion ins Auge bei L gelangen, und zwar in der Richtung LK, in welcher direct auch das Bild des Punktes I gesehen wird. Die Bilder beider Punkte I und F werden in K sich demnach zu berühren, oder zusammenzufallen (coincidiren) scheinen. Ist mit dem Inderspiegel AB eine Alhidade Am fest verbunden, so hat diese, wenn die Bilder von I und F zur Bedekkung gebracht worden, einen Bogen mn beschrieben, der die Hälfte des Winkels oder Bogens pq ist, welchen I und F mit dem Centrum oder Drehungspunkte H des Spiegels AB bilden. Der Bogen mn doppelt

genommen giebt folglich das Gradmaß des Bogens p q. oder des gesuchten Winkels I H F. Eigentlich wird aber der Winkel verlangt, welchen F und I mit dem Visirpunkt (Auge des Beobachters) in L bilden. Da indessen L sehr nahe bei H und die Entfernungen der Punkte F und I dagegen gewöhnlich sehr beträchtlich sind, so wird der Fehler dieser Winkelexcentricität, nehmlich die Differenz der Winkel I H F und I L F so gering, daß sie meistens als verschwindend außer Acht gelassen werden kann; bei astronomischen Beobachtungen wenigstens ist sie immer gleich Null zu setzen. Man wird die Größe dieses Fehlers, welchen man gewöhnlich die Parallaxe des Sextanten nennt, aus dem beurtheilen, was in der folgenden Abtheilung vom Centriren der Winkel bemerkt werden soll.

Die hier vorgetragene Theorie des Sextanten muß ein Anfänger sich zuvörderst ganz geläufig machen, wenn er den Bau und Gebrauch dieses nützlichen Werkzeuges deutlich einsehen will. Ich glaube diese Theorie in Wort und Bezeichnung — etwas abweichend von andern Schriftstellern — so einfach und klar dargestellt zu haben, daß sie ein auch mit diesem Gegenstand noch gar nicht vertrauter Anfänger sogleich begreifen wird.

Nach dieser Theorie wird von einem Sextanten, Octanten u. dergl. gefordert, daß a) die Spiegel A B und C D vollkommen senkrecht auf der Ebene des Gradbogens stehen, wozu der Bogen m n in unserer Figur gehört; b) daß die Visirlinie L K und demnach die Achse eines, der Deutlichkeit wegen, hierzu gebrauchten Fernrohrs parallel laufe zur Ebene des Gradbogens; c) daß die anvisirten Punkte I und F in der Ebene des Instrumentes, oder vielmehr in einer Ebene liegen, welche durch K und H gelegt, parallel läuft zur Ebene des Gradbogens; d) daß endlich die Spiegel vollkommen ebene seyen, und wenn es gläserne sind, zugleich beide

Parallelgläser. Nach meinem Ermessen ließe sich wohl der unbelegte Theil des kleinern Spiegels CK, welcher auch spiegeln und in gewissen Fällen die Beobachtung stören kann, entbehren und durch eine andere Einrichtung ersetzen.

Die Fehler, welche daraus entspringen, daß die Construction und Stellung eines Sextanten den eben erwähnten Forderungen der Theorie nicht ganz genau entspricht, so wie die davon abhängenden Berichtigungsmethoden, findet man sehr ausführlich erläutert in dem angeführten Werke von Bohnenberger. Hier soll der Sextant so beschrieben werden, wie er der Theorie gemäß seyn müßte, aber nicht immer ist.

§. 75.

Construction des jetzt gebräuchlichen Sextanten. (Fig. 41.)

Alle Theile eines Sextanten, die Gläser ausgenommen, werden insgemein aus Messing bearbeitet. Die Gradbogen des Limbus und des Nonius macht man indessen lieber von eingelegten (eingesprengten) dünnen Silberplatten.

Da der Sextant jetzt schon sehr bekannt ist, und eine wirkliche Ansicht desselben in Hauptstädten leicht zu erlangen steht, so kann ich hier die Anzeige seiner einzelnen Theile kurz zusammenfassen. Hierbei habe ich einen mir gehörigen 5zölligen Sextanten aus Pistor's Werkstätte hieselbst vor Augen, welcher vortrefflich gearbeitet ist, und mir bei meinen Winkelmessungen zeither sehr gute Dienste geleistet hat.

AB ist ein Gradbogen von 170 halben Graden an meinem Sextanten; vor 0^0 ist noch eine Theilung von 10 halben Graden, welche man das excedens

nennt; ein solches excedens hat auch der Nonius nach beiden Seiten seines Bogens. Seiner Benennung zufolge braucht aber der Bogen eines Sextanten nur 120 halbe Grade, die hier ganze Grade vorstellen, oder 60 ganze Grade = dem sechsten Theil der Kreisperipherie zu enthalten. Der Halbmesser dieses Bogens AB ist mehrentheils 5 Zoll, sonst auch wohl 7 oder 10 Zoll. Ein 10zölliger Sextant ist schon für das längere Halten mit der Hand etwas zu schwerfällig, und ein fünfzölliger genau gearbeiteter giebt fast oder ganz dieselbe Genauigkeit. Die Mittelpunktsplatte c besteht mit dem Bogen AB durch vier Verbindungsstücke M, N, R, S aus einem Stück, welches durchaus gleichförmig ungefähr $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien dick ist. Dadurch erhält das Ganze hinlängliche Festigkeit. Oft haben die Sextanten noch mehr Verbindungsstücke, ich glaube ohne Noth. Die Alhidadenregel F läßt sich um das Centrum des Bogens auf der Mittelpunktsplatte C vermittelst eines konischen Zapfens drehen, in einer ähnlichen konischen Hülse, welche durch vier Schrauben an der untern Fläche des Sextanten befestigt ist, und einen Fuß desselben bildet; zwei andere gleich hohe Füße befinden sich an den Speichen M, N nahe am Gradbogen. Auf der runden Platte, in welche sich die Alhidadenregel über der Mittelpunktsplatte endigt, ist der um den Mittelpunkt des Bogens AB bewegliche Inderspiegel G senkrecht durch drei Schrauben befestigt. Dieser ist in einen messingenen Rahmen gefaßt. Ihm gegenüber ist der kleinere halbbelegte Spiegel K auf einem hervorspringenden Theil der Speiche M in der Art aufgestellt, daß er eine Drehung um sein Centrum und auch vermittelst einer kleinen Schraube an seiner hintern Fläche eine berichtigende Neigung gegen die Fläche des Sextanten zuläßt. Auf solche Weise hat man es in seiner Gewalt, den kleinern Spiegel in seiner Lage

gegen den größern zu corrigiren, parallel zu stellen. An der Speiche N befindet sich, dem kleinen Spiegel gegenüber, ein Träger L, der sich durch eine künstliche Vorrichtung an der untern Fläche des Sextanten erhöhen oder erniedrigen läßt. Diese Vorrichtung wird aus Wortbeschreibung nicht verstanden, und muß wie viele andere künstliche Einrichtungen angeschaut werden. Durch ein rundes Loch oben am Träger läßt sich ein gemeines Diopterrohr oder ein zum Instrument gehöriges Fernrohr, welches astronomisch ist, einschrauben. Die Einrichtung muß vom Künstler so getroffen seyn, daß die Visirlinie oder die Achse des Fernrohrs, man mag sie erhöhen oder erniedrigen, immer parallel zur Ebene des Bogens bleibt. Zwischen dem großen und kleinen Spiegel befinden sich an meinem Sextanten 3 gefärbte Parallelgläser von verschiedenen Graden der Durchsichtigkeit. Diese sind um Scharniere beweglich, und lassen sich demnach zurücklegen, oder zu 3, 2 oder 1 derselben zwischen die beiden Spiegel in senkrechter Lage gegen die Ebene des Sextanten stellen. Eben so befinden sich um Charniere beweglich 3 gefärbte Parallelgläser hinter dem kleinen Spiegel, welche sich in die Höhe vor die unbelegte Glasfläche des Spiegels richten, oder auch niederlegen lassen. Ich glaube, daß je 3 gefärbte Parallelgläser überflüßig, und bei Sonnenbeobachtungen u. s. w. schon 2 ausreichen könnten. Man bedenke übrigens, wie schwer es hält, nur ein Parallelglas geometrisch genau zu machen, und daß die Fehler im Parallelismus dreier Gläser sich vermehren. Ich brauche diese 6 gefärbten Gläser nicht bei einer Sonnenbeobachtung, sondern blende das Licht durch ein sehr dunkles Parallelglas, welches ich zu diesem Behuf vor das Okular des Fernrohrs anschraube. Muß aber ein Winkel zwischen der Sonne und einem andern Object, dessen Licht keiner Blendung bedarf, genommen werden, so

lasse ich das dunkle Glas vor dem Okular weg, und blende das Sonnenbild durch eins, nehmlich das dunkelste, der vorerwähnten Gläser, ohne hierbei dem Auge zu schaden. Bei Beobachtung terrestrischer Objecte, selbst des Mondes, werden die gefärbten Gläser gar nicht gebraucht.

Die Alhidade F endigt sich wie gewöhnlich in einen Nonius, der an meinem Sextanten die Winkel auf $\frac{1}{2}$ Minute angiebt; durch Schätzung lese ich dieselben auf $\frac{1}{4}' = 15''$ ab. Die Theilung des Limbus könnte aber noch feiner seyn, so daß der Nonius die Winkel auf 15″ oder selbst auf 10″ angäbe, und die Schätzung nach dem Augenmaß auf 5″ ginge. Der Nonius steht in Verbindung mit einer Mikrometerschraube und einer Klemme am Rande des Limbus. Wird mittelst einer Handschraube die Klemme am Rande festgestellt, so läßt sich vermöge der Mikrometerschraube der Nonius längs dem Limbus sanft fortbewegen. Auf der Alhidadenregel F nahe dem Nonius ist der Träger eines Mikroskops befestigt, welches sich um denselben drehen, und über jede Stelle des Noniusbogens bringen läßt. In ein rundes Loch in der Mitte der Speiche R läßt sich ein Träger T einschrauben, dessen Griff von Holz ist. Vermittelst dieses Trägers hält man den Sextanten in der Rechten, wenn man aus freier Hand, ohne Stativ, Winkel nehmen will. Man kann indessen dies Werkzeug auch mit einem Stativ in Verbindung bringen; dann muß aber durch besondere Schraubenvorrichtungen dafür gesorgt werden, daß man die Ebene des Sextanten nicht allein in eine horizontale, sondern auch in jede andre gegen den Horizont geneigte Lage feststellen kann. In den meisten Fällen möchte die Regierung des Sextanten aus freier Hand, ohne Stativ, vorzuziehen seyn, weil die feste Stellung desselben in die Ebene schiefgeneigter Winkel zu viel Zeit erfordert. In gewissen Fäl-

len kann es nöthig werden, die Ebene des Sextanten horizontal zu stellen; dann müßte man denselben mit seinen drei Füßen auf eine Platte mit 3 Stellschrauben (Trépied) setzen, und seine Ebene mittelst einer aufgesetzten berichtigten Libelle, Röhrenlibelle oder Dosenlibelle, nivelliren. Zur Messung der Vertikalwinkel ließe sich ferner am Sextanten eine Röhrenlibelle fest anbringen; ich halte jedoch die Mitanwendung eines künstlichen Horizontes zu diesem Zweck für sicherer und bequemer.

Im Brennpunkt des achromatischen Fernrohrs, welches beim Visiren nach weit entlegenen Objecten statt des gemeinen Diopterrohrs angesetzt wird, sind über der Blendung zwei feine Silberfäden parallel zu einander, von der Achse ungefähr $\frac{1}{2}$ Linie abstehend, ausgespannt. Eben so können in dem Rohr des gemeinen Diopters ohne Gläser zwei parallele Fäden in gleichen Abständen von der Achse desselben, welche zur Ebene des Sextanten parallel ist, ausgespannt werden.

Der kleine Spiegel K wird so gestellt, daß er gegen den großen Inderspiegel G parallel steht, wenn der Inder, d. h. der Nullpunkt vom Nonius, mit welchem der Spiegel G sich gleichzeitig um gleiche Winkel fortbewegt, auf 0° des Limbus steht oder zeigt. Hierzu braucht man ein sehr weit entlegenes Object, z. B. die Spitze eines etwa 1 bis 2 Meilen entfernten Thurms, noch besser einen himmlischen Körper — ich brauche zu dieser Berichtigung immer die Sonne — deren dioptrisches und katoptrisches, oder directes und indirectes Bild (nehmlich von einem bestimmten Punkt, Grenze desselben) man in der Mitte des kleinen Spiegels zur Bedeckung bringt. Man sehe, was in dieser Hinsicht im §. 74. N° 3 am Ende erinnert worden.

Es leuchtet ein, daß, nachdem die parallele Lage beider Spiegel durch ein gleichsam unendlich weites Ob-

ject berichtigt ist, der Index des Nonius, nehmlich sein Anfangspunkt, nicht mehr auf 0^0 des Limbus zeigen, sondern um mehr oder weniger davon abstehen wird, wenn man nun das dioptrische und katoptrische Bild eines viel nähern Gegenstandes im kleinen Spiegel zur Bedeckung bringt. Diese Abweichung heißt insgemein der Indexfehler, ist aber eigentlich kein Fehler, wenigstens kein Fehler im Bau des Sextanten, läßt sich bei jeder Winkelbeobachtung ungemein leicht finden und in Rechnung bringen, wie wir im folgenden §. sehen werden. Es ist klar, daß dieser Indexfehler für irgend einen entfernten Punkt I bald negativ bald positiv wird, d. h. bald unter, bald über 0^0 des Limbus hinausfällt, je nachdem der Punkt, wornach die parallele Lage der Spiegel annähernd berichtigt worden ist, mehr oder weniger entfernt vom Beobachtungsort liegt, als der Punkt I. (Vergl. Fig. 40.)

Was die Form der einzelnen Theile an einem Sextanten anlangt, so erinnere ich nochmahls: Man muß ein so künstliches Werkzeug in natura mit eignen Augen anschauen.

§. 76.

Gebrauch des Sextanten zu Winkelmessungen. (Fig. 40.)

Wir wollen hier annehmen, ein Sextant entspreche den am Ende des §. 74. angezeigten Forderungen.

Es soll von dem Standort L aus (Fig. 40.) der Winkel gemessen werden, welchen zwei entfernte sichtbare fixe Punkte I und F mit dem Punkt L bilden, nehmlich der Winkel ILF. Dieser Winkel kann in einer durch L gelegten Horizontalebene oder auch in einer gegen diese schiefgeneigten Ebene liegen, **schiefgeneigter Winkel.**

Man halte den Sextanten an seinem Träger in der rechten Hand, und bringe seine Ebene nach dem Augenmaß — wozu einige Uebung gehört — in die Ebene des gesuchten Winkels. In dieser Ebene richte man den kleinen Spiegel CD gegen das Object I linker Hand, so daß man I in der Mitte dieses Spiegels durch das unbelegte Glas in der Direction LKI erblickt. Man suche nun den Inderfehler (Collimationsfehler) für die Entfernung des Punktes I, indem man den größern Spiegel so weit dreht oder in eine solche Lage bringt, daß jener Punkt I auch durch doppelte Reflexion in der Richtung LKI gesehen wird. Hat man dergestalt das dioptrische und katoptrische Bild des Punktes I in K zur Berührung (Bedeckung) gebracht, so sehe man zu, auf wie viel Grad und Minuten ꝛc. des Limbus der Index (Anfangspunkt) des Nonius zeigt; dieser Punkt am Limbus ist der Anfangspunkt des Bogens für den gesuchten Winkel. Zeigt der Index auf 0^0 des Limbus, welches wegen der sehr verschiedenen Entfernungen der Richtpunkte sehr selten der Fall ist, so ist auch der Inderfehler = Null. Zeigt aber der Index auf einen Theilstrich des Limbus unter 0^0 (excedens), z. B. auf — 5, so ist der Inderfehler (— 5′) negativ; dieser Fehler muß begreiflicherweise am Ende der Messung zum Bogenmaß des gesuchten Winkels (von 0^0 des Limbus an gerechnet) addirt werden. Zeigte z. B. am Ende der Index am Limbus in n auf $37^0\,13'$, so wäre der gesuchte Winkel = $37^0\,13' + 5' = 37^0\,18'$. Der Inderfehler muß immer negativ werden, wenn die parallele Stellung der beiden Spiegel durch ein sehr weit entlegenes Object annähernd berichtigt worden ist, der Punkt I hingegen dem Auge bei L weit näher liegt, und zwar wird dieser negative Inderfehler immer um so größer, je näher I an L liegt. Bei ganz nahe gelegenen Punkten kann der Fehler wohl bis auf

1° steigen u. s. w. Zeigt endlich unter den oben bemerkten Umständen der Index auf einen Punkt des Limbus über 0° z. B. auf + 5′, so ist der Inderfehler (+ 5′) positiv. Dieser positive Fehler muß im Gegentheil am Ende der Messung vom Bogenmaß des gesuchten Winkels (von 0° des Limbus an gerechnet) subtrahirt werden. Wenn z. B. am Ende der Index am Limbus in n auf 37° 23′ zeigte, so wäre wegen des Inderfehlers + 5′ der gesuchte Winkel = 37° 23′ — 5′ = 37° 18′. Unter welchen Umständen aber der Inderfehler für einen entfernten Punkt I positiv werden müsse, kann der Leser, ohne fernere Erklärung von meiner Seite, aus dem vorher Gesagten beurtheilen.

Ist bei der Stellung des Index auf 0° des Limbus die Berichtigung der Spiegellagen vermittelst eines nur mäßig weit entfernten Punktes, z. B. einer $\frac{1}{2}$ Stunde weit entlegenen Thurmspitze ein für allemahl gemacht worden, so kann der Inderfehler für den Punkt I bald positiv bald negativ werden u. s. w.

Bei jeder Winkelmessung muß man durchaus zuerst den Inderfehler für den links liegenden Richtpunkt I so genau wie möglich aufsuchen, und zuletzt in Rechnung bringen. Eine Nachläßigkeit in dieser Hinsicht kann sehr nachtheiligen Einfluß auf eine ganze Vermessung haben.

Nachdem der Fehler des Index für den links liegenden Punkt I genau bemerkt worden, drehe man ferner mit der linken Hand die Alhidade und den damit fest verbundenen größern Spiegel um das Centrum des Sextanten von der Linken zur Rechten so weit, bis das Bild des Richtpunktes F rechts, durch doppelte Reflexion in der Richtung L K, nehmlich dicht am Punkte K des belegten Spiegels K D erscheint, so daß also die beiden Bilder von F und I einander in K zu berühren (bedecken) scheinen. Hat man dies so genau

wie möglich erreicht, so ist nach §. 74. der Winkel bHB = ½ Winkel FHI, oder Bogen mn = ½ Bog. pq. Dem zu Folge giebt die wahre Gradzahl des Bogens mn, welchen der Index am Limbus beschrieben, doppelt genommen das Gradmaß des Winkels FHI. Halbe Grade am Limbus des Sextanten werden daher als ganze Grade betrachtet, und durch die aufgestochenen Ziffern als solche notirt. Wäre z. B. der Bogen mn = 60 halbe Grade, so würde der gesuchte Winkel = 60° seyn u. s. w. Mithin kann man mittelst eines Sextanten, dessen Bogen eigentlich seiner Benennung gemäß nur 60° = 120 halbe Grade seyn sollte, bloß Winkel von 0° bis 120° messen. Größere Winkel nahe an 180° oder darüber muß man durch Zwischenpunkte (natürliche oder künstliche Signale) in kleinere Winkel gleichsam zerlegen, und die einzeln gemeßnen Winkel summiren. So kann man alle Winkel rund herum im Horizonte messen und summiren; giebt diese Summe 4R = 360° genau oder doch bis auf eine sehr geringe Differenz sehr nahe, so zeugt dies Resultat für die Güte des Sextanten.

Bei der erwähnten Operation ist der Winkel IHF gemessen worden, dessen Centrum der Drehungspunkt H des Inderspiegels ist. Eigentlich verlangt man aber den Winkel ILF vom Visirpunkt L aus betrachtet. Da die Punkte L und H am Sextanten nur um ein paar Zolle von einander entfernt liegen, so beträgt der Fehler des gemessenen Winkels wegen der Parallaxe bei beträchtlichen Weiten der Punkte I und F so wenig, daß er meistens ganz außer Acht gelassen werden kann. Auch ziehen diesen Fehler selbst die vorzüglichsten Schriftsteller, z. B. Bohnenberger, in gar keine Betrachtung.

Auf die Größe des Winkels IHF hat die Entfer-

nung des Punktes F gar keinen Einfluß; ein in der Richtung HF viel weiter entfernter Punkt F' giebt denselben Winkel. Hingegen kann die größere oder geringere Entfernung des Punktes I den Inderfehler kleiner oder größer machen. Bringt man den Mittelpunkt H des Sextanten so genau wie möglich senkrecht über den Stationspunkt auf der Erde, so verschwindet auch der an sich ganz unbedeutende Fehler wegen der Parallaxe. Die entfernten Objekte I und F sind keine Punkte, sondern geben Bilder von einer größern oder geringern Ausdehnung; diese Bilder werden daher im kleinen Sextantenspiegel zur Berührung oder Bedekkung (mit Fernrohr) gebracht; indessen nimmt man immer in beiden Bildern gewisse bestimmte Grenzpunkte oder Scheidungslinien für Richtpunkte an, z. B. bei entfernten Thürmen ihre obersten Spitzen oder ihre mittlern Durchschnittslinien (gleichsam Achsen), bei Himmelskörpern die äußersten Ränder.

Das katoptrische Bild vom rechtsliegenden Object F verliert durch den zweimaligen Contact mit Spiegeln, welche Luft verschlucken und in sich binden, beträchtlich an Lichtintensität, noch viel schwächer wird dies Bild bei seinem Durchgang durch die Gläser eines Fernrohrs. Bei starker Beleuchtung des Vordergrundes und des Inderspiegels kann das katoptrische Bild von einem sehr entfernten Object im Fernrohr so schwach werden, daß man es kaum bemerkt; ein Umstand, der die Winkelmessung mit dem Sextanten oft sehr erschwert. Bei nahen Gegenständen wird man lieber mit bloßen Augen, wenn sie klar sehen, durch das gemeine Diopterrohr als vermittelst des Fernrohrs visiren.

Braucht man das Fernrohr, dessen Sehachse sich mittelst der Schraubenvorrichtung am Träger gegen die Ebene des Sextanten mehr oder weniger erhöhen läßt, so kann man das Objectiv gegen den kleinen Spiegel

so stellen, daß beide Bilder, das dioptrische und katoptrische (reflectirte), bei ihrer Bedeckung oder Berührung ungefähr gleich hell erscheinen.

Nach §. 74. wird sich die Lage der beiden Bilder, die man im kleinen Spiegel einmahl zur Bedeckung gebracht hat, nicht ändern, wenn sich das Instrument um sein Centrum in der Ebene des Winkels etwas bewegt u. s. w. So begreift man, warum ein Sextant eines Statives nicht nothwendig bedarf, und in so fern nicht allein zur See, sondern auch auf dem festen Lande sehr nützliche Dienste leistet.

Indessen ist ihm da, wo man dem Winkelmesser einen festen Stand geben kann, ein Repetitions-Theodolit nach der vorher beschriebenen Art nach meiner Ueberzeugung und nach den von mir deshalb angestellten vergleichenden Versuchen immer vorzuziehen. Ein Theodolit giebt erstlich die terrestrischen Winkel sogleich auf den Horizont reducirt, wie solche insgemein verlangt werden; diesen Vortheil können Spiegelwerkzeuge ihrer Natur nach nicht verschaffen. Letztere gewähren ferner ihrer Lichtschwäche wegen für terrestrische Objecte nicht den Grad der Schärfe und Deutlichkeit im Visiren, wie ein Theodolit mit Fernrohr. Dieser ist weniger Fehler in seiner Structur ausgesetzt, als ein Sextant, bedarf daher weniger Correctionen. Endlich gewährt ein Theodolit den ausgezeichneten Vortheil einer unmittelbaren Repetition der Winkelmessung. Es läßt sich zwar, wie D. Benzenberg in einem Aufsatz des astron. Jahrb. von Bode, 1806, bemerkt, etwas dieser Repetition Aehnliches mit einem Sextanten vornehmen, indem man damit einen Winkel wiederholentlich mißt, und aus allen Beobachtungen das arithmetische Mittel nimmt, so daß sich hier die Fehler entweder gegen einander geradezu aufheben, oder die übrigbleibenden, durch die Zahl der Beobachtungen dividirt,

vermindern; allein der Grad von Genauigkeit und Zuverläßigkeit, wie ihn der repetirende Theodolit oder bei astronomischen Beobachtungen der multiplicirende Bordasche Kreis gestattet, ist durch das sehr verschiedene Multipliciren der Winkel mit dem Sextanten sicherlich nie zu erreichen. Seine Anwendung sollte daher bei sehr genauen Landesvermessungen nur auf solche Fälle beschränkt werden, wo ein fester Stand des Theodoliten nicht möglich ist, z. B. wenn man beim Trianguliren von einzelnen Thürmen aus nach andern Richtpunkten visirt; sowohl wegen des gewöhnlich sehr beengten Raums als auch wegen der elastischen Bewegung (Federung) der Thurmspitzen kann man hier den repetirenden Kreisen keinen ganz festen Stand geben. Auch bei kleinern Triangulirungen und Aufnahmen, wo die Horizontalwinkel oder Vertikalwinkel etwa nur bis auf 1′ genau verlangt werden, ist der Sextant ein sehr bequemes und brauchbares Werkzeug.

Für solche kleinere Messungen werden jetzt, nach dem Muster des größern Sextanten von Englischen und Deutschen Künstlern — hier von Pistor — auch kleine, etwa 2zöllige, Dosensextanten (box sextants) angefertigt, deren nähere Beschreibung ich hier übergehen muß. Diese bequemen kleinen Winkelmesser, welche man in der Tasche bei sich führen kann, geben die Winkel bis auf 2′ oder auch 1′ genau; weiter möchte sich aber ihre Genauigkeit selten erstrecken. Ich besitze einen solchen Dosensextanten mit kleinem achromatischen Fernrohr, aus der Werkstatt des Künstlers Cary in London, sehr gut gearbeitet und getheilt u. s. w., womit ich den Sonnen- oder Mond-Durchmesser jederzeit bis auf 1′ und durch ungefähre Schätzung auch wohl bis auf $\frac{1}{2}$′ genau erlange.

Was sonst noch über die Handhabung eines Sextanten erinnert werden könnte, das erlernt man am

besten durch Uebung und aufmerksamen Gebrauch des Instrumentes selbst.

§. 77.

Messung der Höhenwinkel (Vertikalwinkel) vermittelst des Sextanten und eines natürlichen oder künstlichen Horizonts.

(Fig. 42.)

Es sey A ein Standpunkt (Beobachtungsort) auf der Erdoberfläche; MH bezeichne den durch A gehenden (gelegten) scheinbaren Horizont, S irgend ein über diesen Horizont erhöhtes Object, z. B. die Sonne. Denkt man sich durch SA eine Vertikalebene auf die Ebene des scheinbaren Horizonts gelegt, so wird diese von jener in MAH geschnitten, und es heißt der Winkel MAS = m der Höhenwinkel (Elevationswinkel) des Punktes S über A, d. h. über den scheinbaren Horizont von A. Steht AZ senkrecht auf dem Horizont von A, so liegt sie auch in der Vertikalebene SAM; der eingebildete Punkt Z heißt das Zenith für A und der Winkel SAZ heißt die Zenithdistanz des Punktes S in Beziehung auf den Punkt A. Die Zenithdistanz ist das Complement des Höhenwinkels zu 90^0 und umgekehrt. Demnach ist es ganz gleichgültig, welchen man von beiden Winkeln mißt, um das Gradmaß des einen zu erhalten.

Soll nun mit einem Sextant der Höhenwinkel MAS gemessen werden, so kann dies auf zwei verschiedene Arten geschehen:

1) Wenn AM eine sichtbare Horizontale ist, die in M irgend einen natürlichen oder künstlichen deutlichen Bewegungspunkt hat, so mißt man den einfachen Winkel SAM auf ganz ähnliche Weise, wie irgend einen

andern horizontalen oder schiefgeneigten Winkel nach §. 76.

Man hält nehmlich in A den Sextanten so, daß seine Ebene in die Vertikalebene des Winkels SAM fällt, — wobei Uebung das Beste thut, — richtet die Achse des gemeinen Diopters oder Fernrohrs auf den Punkt M, so daß man M durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels erblickt, und bewegt bei unverrücktem vertikalen Stand des Instruments die Alhidade ꝛc. so weit fort, bis das katoptrische reflectirte Bild von S mit dem dioptrischen M zur Berührung oder Bedeckung kommt, so zeigt der Index, dessen Fehler für M vorher genau bestimmt worden, den Winkel SAM in Graden, Minuten ꝛc. an. Siehe §. 76. — Die vertikalstehende Ebene des Limbus hat hierbei der Beobachter zur Linken, und den untern Richtpunkt M im Horizont sieht er direct durch den kleinen Spiegel. In dieser beschränkten Beziehung auf Höhenbeobachtungen zur See nennen denselben die Engländer das Horizontalglas. Man wird aber, besonders wenn man einen Sextanten zur Hand hat, bald einsehen, daß man die Methode der Beobachtung auch umkehren kann, indem man die vertikal stehende Ebene des Limbus zur Rechten hat, dann den obern Richtpunkt S direct durch den kleinen Spiegel betrachtet u. s. w. Eine ganz ähnliche Umkehrung kann ebenfalls bei Messung von Horizontal- und andern Winkeln Statt finden, welches keiner weitern Erklärung bedarf. In mehreren Fällen kann es gerathener seyn, statt der einen Beobachtung die umgekehrte oder auch zu größerer Sicherheit beide Methoden zugleich anzuwenden. So viel mir bewußt ist, vergessen die Schriftsteller, welche vom Sextanten handeln, diese Umkehrung anzuzeigen. Bei Beobachtungen von Sonnen- Mond-

oder Stern-Höhen zur See nimmt man den natürlichen Meereshorizont zu Hülfe; die äußerste Begrenzung desselben wird auf offener See durch eine kreisbogenförmige Linie bestimmt, in welcher der Himmel (Luft) und der Wasserspiegel rund herum einander zu berühren (zusammenzutreffen) scheinen. In dieser Begrenzung wird daher der sichtbare Punkt M unsrer Figur liegen. Bei Nacht hat natürlich eine Beobachtung auf solchem Wege ihre Schwierigkeiten; der Meereshorizont kann durch große Dunkelheit oder zwischenliegende Hindernisse, z. B. Landerhöhungen auch wohl ganz versteckt werden. — Bei Höhenbeobachtungen zu Lande hat man selten oder nie einen natürlichen zuverläßigen Horizont. Gilt es nur wenig genaue Höhenmessung, so bestimmt man die Horizontale A M nach dem Augenmaß durch ein sichtbares Merkmahl in M, A u. s. w. Handelt es sich hingegen um sehr genaue Messung eines Höhenwinkels S A M, so muß man schlechterdings irgend einen künstlichen Horizont in Verbindung mit dem Sextanten gebrauchen. Was die Correction des auf erwähnte Art gefundenen Höhenwinkels, wegen der Refraction und des scheinbaren Horizontes, anlangt, so sehe man, was hierüber in der vierten Abtheilung gelehrt wird.

2) Wenn A M eine künstliche Horizontale in einer spiegelnden Ebene ist, so mißt man den doppelten Winkel S A M, nehmlich S A U (Fig. 42.). Einen künstlichen Horizont (Horizontalebene) für einen Punkt A auf der Erdoberfläche erhält man auf zweierlei Arten:

a) Durch die ruhig stehende Oberfläche einer Flüßigkeit, welche wie ein ebener Spiegel die auffallenden Lichtstrahlen reflectirt. Daher hat man Queckſilberhorizonte, Oelhorizonte u. dergl. in

Vorschlag gebracht. Einen künstlichen Quecksilberhorizont beschreibt unter andern Bohnenberger a. a. O. Da die Oberfläche eines solchen Horizontes durch jede selbst schwächere Erschütterung in ihrer Nähe, auch durch Wind in Bewegung gesetzt, und somit seine ebene horizontale Fläche mehr oder weniger gestört wird, so wird dadurch sein Gebrauch sehr eingeschränkt.

b) durch die völlig ebene spiegelglatte Fläche eines festen Körpers, welche vermittelst einer Libelle horizontal gestellt, nivellirt wird. Man wendet hierzu ebene Metallspiegel oder unbelegte Glasspiegel an. Die Glashorizonte sind brauchbarer und dauerhafter, als die metallenen.

Einen Glashorizont, welchen zuerst der Graf v. Brühl in London und Hr. v. Zach angaben und näher beschrieben, will ich hier kürzlich so schildern, wie ich mir zu meinem Gebrauch einen solchen selbst habe anfertigen lassen.

Das wesentliche Hauptstück desselben besteht in einer kreisrunden Glasscheibe, etwa 5 Duod. Zoll im Durchmesser und gegen 3 Linien dick, auf der einen Seite mit der größten Sorgfalt vollkommen plan, auf der andern Seite aber matt geschliffen. Auf die Farbe des Glases kommt wenig an, dunkle Gläser scheinen indessen etwas schärfer begrenzte Bilder, obwohl mit geringerer Lichtintensität, ins Auge zu senden, als ganz weiße. Mein Glasspiegel hat dunkelgrüne Farbe, und giebt die reflectirten Bilder ungemein rein, klar und scharfbegrenzt in noch höherm Grade, als sich ohne dem die Bilder der Objecte directe dem Auge darstellen; andere nehmen hierzu dunkelrothes Glas u. s. w. Man muß, um einen guten Horizont zu erlangen, mit der größten Aufmerksamkeit nur eine völlig reine, blasen- und schnieren-freie Glasscheibe hierzu aussuchen. Auch

muß der Spiegel so lange berichtigt werden, bis er alle Prüfungen auf geometrische Planität besteht. Das vollkommene Planschleifen ist allerdings eine der schwierigsten Aufgaben der practischen Optik, aber durch Geschicklichkeit und eigensinnige Beharrlichkeit des Optikers läßt sie sich gewiß auflösen. Mein Spiegel ist plan, so weit nur das Auge und die strengsten Prüfungsmethoden es zu erweisen im Stande sind. Die beste Prüfung besteht darin, daß man mit dem Sextant das dioptrische und katoptrische Bild der Sonne an ihren äußersten Rändern zur Berührung bringt, — man braucht hier das Fernrohr —, und somit den Sonnendurchmesser in Minuten ꝛc. mißt, hierauf aber dasselbe mit dem vom nivellirten Glashorizonte reflectirten Sonnenbilde thut. Bleiben hierbei die Sonnenbilder genau in Berührung, oder zeigt sich der Sonnendurchmesser bei beiderlei Beobachtungen gleich, so ist die untersuchte Stelle auf dem Spiegel plan; im Gegentheil werden sich die beiden Bilder bei gleicher Stellung des Index trennen oder in einander verschieben. So lassen sich alle Stellen des Planspiegels untersuchen. Man kann auch von einer scharfbegrenzten Thurmspitze das dioptrische und das vom Glashorizont reflectirte katoptrische Bild im Fernrohr des Sextanten sehr genau zur Berührung bringen, und nun an verschiedenen Stellen des Glashorizontes untersuchen, ob sie unverändert in Berührung bleiben u. s. w. Die groben Fehler der gemeinen Planspiegel werden geradezu schon durch die Verzerrung der von ihnen reflectirten Bilder — besonders gerader Linien — ganz leicht bemerkt.

Das Gestell, worauf der Spiegel gelegt wird, besteht aus einer dosenförmigen hölzernen Fassung mit einer oben ausgedrehten Vertiefung mit 3 kleinen kugelförmigen Aufsätzen von Siegellack, worauf man das Glas legt, und 3 elfenbeinernen Stellschrauben, welche

durch drei Muttern von Elfenbein in dem unsern hervorstehenden Rand gehen. Man kann auch Marmor, Serpentin, Porzellan ꝛc. zur Fassung nehmen.

Außer diesem kleinen Gestell, welches bloß zur Messung von Höhenwinkeln dient, habe ich mir noch ein andres mit etwas hohen Füßen machen lassen; diese tragen einen oben vertieft eingedrehten messingenen Ring, in welchen ich den Glashorizont mit der Spiegelfläche nach unten einlegen kann. Die obere mattgeschliffene Fläche ist nach mehreren Berichtigungen parallel zur untern Spiegelfläche gemacht worden. So kann ich durch Nivelliren der obern matten Fläche mittelst einer aufgesetzten Libelle auch zugleich die untere Spiegelfläche in den scheinbaren Horizont bringen, und nun auf eine ähnliche Weise, wie man Höhenwinkel mit dem Sextanten und künstlichen Horizont nimmt, auch Tiefenwinkel (Depressionswinkel) messen. Geht die Genauigkeit hierbei auch nur bis auf 1′, so reicht sie zu dem gewöhnlichen Behuf, besonders zur Reduction der schiefgemessenen Winkel auf den Horizont, wie ich glaube, hinlänglich aus.

Das Horizontalstellen, Nivelliren, des künstlichen Glashorizontes (ein Queckſilber- oder Oel-Horizont bedarf dessen nicht) vermittelst der Libelle ist schon in dem Artikel: Libelle angezeigt. Bei genauen Winkelmessungen brauche ich gewöhnlich eine ungefaßte unten angeschliffene Röhrenlibelle, bei weniger genauen Messungen hingegen eine Dosenlibelle.

Man hat auch versucht, eine Dosenlibelle, vermittelst dreier Stellschrauben, zugleich zu einem künstlichen Horizont zu machen. Die völlig ebene Oberfläche des Glasdeckels vertritt hier die Stelle des Spiegels, und dieser wird nivellirt, indem man durch die, gewöhnlich metallenen, Stellschrauben die Luftblase in die Mitte bringt. Ein solches Werkzeug hat viele Vorzüge, wenn

es genau gearbeitet ist; ich glaube aber, daß es nur mit sehr vieler Mühe zu erlangen seyn möchte.

Soll nun mittelst eines Sextanten und eines künstlichen Horizonts ein Vertikalwinkel SAM gemessen werden, so wird der Glashorizont über A (so nahe wie möglich) nivellirt; ein Queckſilber- oder Oel-Horizont thut dies von selbst. Der auf die Spiegelfläche in A auffallende Lichtstrahl wird unter dem Winkel OHA = Winkel SAM reflectirt, und zwar liegen beide Winkel in einer auf den Horizont vertikalen Ebene. Man denke sich OA rückwärts verlängert, so wird W. n = n' = m, also W. SAU = 2 W. SAM. Ein Auge in o sieht also das reflectirte Bild von S in der Richtung OAU, gleichsam als läge S in U; liegt zwischen O und S kein Hinderniß des Sehens, so fällt das Bild von S zum zweiten Mahle directe in der Richtung SO ins Auge. Folglich sind S und U gleichsam zwei verschiedene Richtpunkte, die mit dem Orte der Beobachtung den Winkel SOU bilden.

Man bringe die Ebene des Sextanten in die Vertikalebene durch SA, das Diopter in die Richtung OA, so daß man durch das unbelegte Glas des kleinen Spiegels das vom Horizont reflectirte Bild von S erblickt; hierauf bewegt man den Inder längs des Limbus so weit fort, bis man auch das von beiden Spiegeln zweimahl reflectirte Bild von S ins Sehefeld bekommt; vermittelst der Mikrometerschraube bringe man beide Bilder in der Mitte zwischen den beiden parallelen Fäden des Fernrohrs genau zur Berührung. Ist dies geschehen, so giebt die Gradzahl, worauf der Inder steht, mit gehöriger Berücksichtigung des Inderfehlers, den Winkel SOU, der bei der sehr geringen Distanz des Sextant von A dem W. SAU gleichgesetzt werden darf, um so mehr, wenn S in Rücksicht auf AO ein unendlich weit entferntes Object, z. B. die Sonne oder ein

andrer Himmelskörper, oder auch ein weit entlegenes terrestrisches Object ist. In diesem Fall kann man den parallactischen Winkel A S O = 0° setzen, also A S parallel O S, mithin Winkel S A U = S O U annehmen.

Der gefundene Winkel halbirt giebt den einfachen Höhenwinkel S A M. Nimmt man auf solche Weise eine Sonnenhöhe, und bringt man beide Sonnenbilder nicht zur Bedeckung, sondern zur Berührung der Ränder, welches immer sichrer ist, so muß man zur gefundenen einfachen Höhe (Winkel) den halben Durchmesser der Sonne (in Minuten ꝛc.) addiren, um die Erhöhung des Sonnenmittelpunkts über den scheinbaren Horizont zu erhalten. Der Grund hiervon ist nicht schwer zu finden. — Wenn man Sonnenhöhen nimmt, so blendet man ihre zwei Bilder durch ein paar gefärbte Gläser des Sextanten; ich selbst bediene mich gewöhnlich nur eines dunkeln Glases vor das Okular geschraubt, ohne dem Auge zu schaden.

Es muß hier noch ein für allemahl bemerkt werden, daß man erst einige Uebung haben, und mit dem Sextant gewissermaßen vertraut seyn muß, um die Bilder bei einer Winkelmessung leicht ins Sehefeld zu bekommen, und dann zur Bedeckung oder Berührung zu bringen. Anfängern macht dies, wie ich bei meinen Zuhörern bemerkt habe, immer einige Schwierigkeit, besonders wenn statt des gemeinen Diopters das Fernrohr gebraucht wird.

Da man mit dem Sextant und dem künstlichen Horizont immer die doppelten Höhenwinkel mißt, so lassen sich damit nur einfache Winkel der Art nehmen, die höchstens auf 60° steigen. Terrestrische Elevationswinkel von dieser Größe kommen selten vor.

§. 78.

Kurze Notiz von den Fehlern und den Berichtigungen eines Sextanten.

Außer den Fehlern, welche ein Sextant mit andern Winkelmessern gemein haben kann, z. B. in Hinsicht der Ebene seines Gradbogens, der Theilung, Centrirung, sind ihm noch einige andere eigenthümlich, und zwar von der Beschaffenheit, daß sie sich entweder durch besonders angebrachte Correctionsmittel berichtigen lassen, oder als constante Fehler einzelner Theile des Werkzeugs unabänderlich verbleiben, wenn diese Theile selbst in ihrer Form nicht verbessert werden. Zu diesen Fehlern gehören hauptsächlich folgende:

a) die mangelhafte, besonders prismatische, Gestalt der Spiegel; b) die nicht vollkommen senkrechte Stellung des großen und kleinen Spiegels auf die Ebene des Sextanten; c) die Achse des Diopters oder Fernrohrs, als Visirlinie (Collimationslinie) läuft nicht parallel zur Ebene des Gradbogens; d) die gefärbten Blendegläser sind nicht genaue Parallelgläser.

Diese Fehler und ihr Einfluß auf die gemessenen Winkel werden also gefunden:

a) Wie man die Ebene einer spiegelnden Fläche prüfen könne, habe ich im vorigen §. angezeigt. Ob die beiden Flächen eines Spiegels parallel oder unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigt sind (prismatischer Spiegel), erfährt man, indem man das vom Spiegel reflectirte Bild eines möglichst weit entfernten Objects, vorzüglich der Sonne oder des Mondes, genau beobachtet, am besten durch ein gutes kleines Fernrohr; sind die Flächen des Glases parallel, so sieht man nur ein scharf begrenztes Bild, im Gegentheil wenigstens zwei Bilder, wovon das eine bläßer und neblicht erscheint, und welche um so weiter von einan-

der abliegen, unter einem je schiefern Winkel das Object sein Licht auf den Spiegel wirft. Auch Parallelspiegel, z. B. der kleine Spiegel des Sextanten, machen von sehr nahen Objecten zwei Bilder, welche aber bei einer nur mäßigen Entfernung der Objecte in Eins zusammenfallen. Daher dieser Fehler am Sextanten bei der gewöhnlichen Winkelmessung als Null zu betrachten ist. Prismatische Spiegel muß man an seinem Sextanten durchaus nicht dulden, und einen solchen von einem Optikus genau berichtigen lassen, um die stets unsichern Berichtigungen, welche ein so fehlerhafter Spiegel nöthig machen würde, ganz entbehren zu können. Man hat, um der Gefahr prismatischer Glasspiegel zu begegnen, Metallspiegel, besonders von Platina, in Vorschlag gebracht; diese Idee ist aber im Allgemeinen nicht wohl ausführbar. Wollte man den Inderspiegel von sehr dunklem undurchsichtigen Glas machen, so würden die reflectirten Bilder, etwa das der Sonne ausgenommen, zu viel an Licht oder Helligkeit verlieren. Der beste Rath ist also dieser, daß man für genau parallele, belegte Glasspiegel sorge.

b) Ob der größere Inderspiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe, wie es zu genauer Winkelmessung damit verlangt wird, erfährt man am besten also: M und N (Fig. 43.) sind zwei zu diesem Behuf besonders eingerichtete Stell-Instrumente. Jedes derselben besteht aus einer rechtwinklicht umgebogenen oder noch besser aus zwei sehr eben gearbeiteten und genau senkrecht an einander gesetzten (gelötheten) kleinen Metallplatten. Die untere Fläche zum Aufsetzen muß sorgfältigst eben gemacht werden. In der aufrecht stehenden Platte von M ist eine feine Oeffnung (Loch) bei O durchbohrt; die aufrecht stehende Platte von N ist durchbrochen, und in gleicher Höhe über seiner Grundfläche, wie die Oeffnung O über der Grundfläche

von M ist, ist ein sehr feiner Faden (gewöhnlich Silberfaden) parallel zur Basis ausgespannt, dergestalt, daß der Faden K L durch O geht, wenn man M und N auf einer Ebene mit ihren aufrecht stehenden Platten an einander schiebt. Man kann auch in M zwei feine Löcher, und in N zwei gleich hoch gestellte zur Grundfläche parallele Fäden anbringen. Je genauer die beiden Stell-Instrumente von einem Künstler angefertigt sind, desto sichrer kann er damit den vertikalen Stand des Indexspiegels untersuchen und berichtigen.

Man bringt den Sextant auf einer festen Unterstützung in eine ungefähr horizontale Lage, und legt M auf den Limbus etwa bei dem Theilstrich von 120°, so daß seine Grundplatte gegen den Indexspiegel gerichtet ist, und die Ebene der senkrechten Platte von M ziemlich nahe parallel gegen die Spiegelebene steht. Nun bewegt man den Index, nachdem man den Träger des Diopters von der Ebene des Gradbogens weggenommen, so weit rückwärts hinter 0° der Theilung, daß man durch die Oeffnung O des Stellinstrumentes M das Bild von M und O im Indexspiegel sieht. Dies wird geschehen, wenn der Visirstrahl durch O senkrecht auf den Spiegel fällt, und die Stellung desselben solches gestattet, welches immer möglich wird, wenn der Bewegung der Alhidade um das Centrum nichts im Wege steht. Hat man dies erlangt, so setzt man zwischen dem Spiegel und M das zweite Stellinstrument N auf die Ebene des Gradbogens nahe beim Spiegel. Geht nun beim Visiren durch die Oeffnung O der Faden K L genau durch die Mitte des Bildes von O, welches vom Spiegel reflectirt wird, so hat dieser die richtige vertikale Lage gegen die Ebene des Sextanten. Sind in M zwei Oeffnungen und in N gleich hoch zwei Fäden angebracht, so geschieht die Prüfung doppelt. Der Grund derselben ist leicht zu begreifen.

Findet man einen Fehler im vertikalen Stand des Spiegels, so muß er verbessert werden, welches durch gehörige Verkürzung eines der unter dem Spiegel befindlichen Stifte geschieht. Man kann auf solchem Wege den Spiegel so weit berichtigen, daß seine Neigung gegen die Ebene des Gradbogens nicht mehr als etwa 2 bis 3′ betragen kann. Der Fehler, welcher hieraus in den gemessenen Winkeln entsteht, kommt bei diesem Instrument in wenig oder gar keine Betrachtung. Wäre z. B. die Neigung des Spiegels = 10′, so betrüge selbst der Fehler in einem Winkel von 120° kaum 2″, bei kleinern Winkeln noch weniger. — Der große Spiegel wird schon vom Künstler in seiner Lage gehörig berichtigt, und in derselben so stark als möglich befestigt, damit dem Beobachter die öftern Correctionen durch besondre Schrauben, welche das Instrument zu sehr zusammengesetzt machen würden, ganz erspart werden.

Ist einmahl der große Spiegel senkrecht auf die Ebene des Sextanten gestellt, so läßt sich ferner auch der senkrechte Stand des kleinen Spiegels leicht untersuchen und corrigiren. Man bringe wie gewöhnlich das dioptrische und katoptrische Bild von irgend einem scharf begrenzten Punkt (am besten einem geradlinigten Rand) im kleinen Spiegel zur Bedeckung oder Berührung. Ist diese Bedeckung oder Berührung sehr genau, so steht der kleine Spiegel senkrecht auf der Ebene des Gradbogens. Kann man hingegen das directe und indirecte Bild nicht genau zur Bedeckung bringen, sondern geht eins über oder unter dem andern bei Bewegung des Index vorüber, so steht der kleine Spiegel nicht gleich dem großen senkrecht auf der Ebene des Gradbogens. Durch zwei besondere am kleinen Spiegel angebrachte und wirklich nothwendige Correctionsschrauben läßt sich dann die senkrechte Lage desselben

berichtigen, indem man durch Anziehung der einen oder andern Schraube und gegenseitiges Losmachen der entgegengesetzten die erwähnte Berührung oder Bedeckung bewirkt. Diese Correction geschieht am zuverläßigsten durch helle Sterne. Die Erklärung hiervon ist leicht, besonders wenn man einen Sextanten wirklich zur Hand nimmt, und aufmerksam betrachtet. Auf der See braucht man zur Berichtigung den ziemlich scharf begrenzten Rand des Meerhorizontes. Man kann annehmen, daß sich diese Berichtigung bis auf $\frac{1}{2}$ Minute oder noch genauer erlangen läßt. Der hieraus entstehende Fehler in gemessenen Winkeln, wenn sie nicht sehr klein sind, kommt in keine Betrachtung.

c) Wenn die Achse des Diopters oder Fernrohrs — als Visirlinie — nicht genau parallel zur Ebene des Sextanten läuft, so heißt dies der Deviationsfehler des Instruments. Dieser hat auf die gemessenen Winkel schon einen nachtheiligern Einfluß, als die vorerwähnten. Insgemein wird die parallele Lage der Sehachse des Fernrohrs also untersucht:

Nachdem man den Sextant horizontal aufgesetzt und die Fäden im Fernrohr parallel zur Ebene des Gradbogens gestellt hat, setzt man das Stell-Instrument M (Fig. 43.) neben das Fernrohr, das andre N neben den kleinen Spiegel so auf die Ebene des Gradbogens, daß eine gerade Linie durch ihre Mitte nach dem Augenmaß parallel zur Achse des Fernrohrs wird. Durch einige Erhöhung des Sextant von der einen oder andern Seite kann man den Faden von N auf einen scharfbegrenzten entfernten Punkt richten. Wenn man nun diesen Punkt zugleich auch mitten zwischen den horizontalen Fäden des Fernrohrs erblickt, so läuft seine Achse, wenigstens sehr nahe, parallel zur Ebene des Gradbogens. Die Sache bedarf für denkende Leser keiner weitern Erläuterung. Findet sich ein bemerklicher Fehler der Art, so

muß ihm vom Künstler, der das Instrument verfertigt, schlechterdings abgeholfen werden, welches immer möglich ist. Es sind nach Annäherungsformeln der sphärischen Trigonometrie eigne Tafeln berechnet worden, welche für kleine Deviationsfehler eines Sextanten die zugehörigen Korrectionen der gemessenen Winkel aber nur von 10 zu 10° angeben, weil die Zwischendifferenzen sehr gering sind. Borda giebt in seiner Schrift: Description et usage du cercle de Reflexion etc. eine solche Tafel der Deviationsfehler für kleine Winkel von 10′ bis 1°, und dann für die übrigen Winkel von 10° zu 10°. Eine ähnliche Tafel findet sich auch in Bohnenberger's Werk über die geographische Ortsbestimmung ꝛc. Damit doch der Leser einen Begriff von dieser Art zusammengehöriger Fehler bei einem Sextanten bekomme, möge folgende abgekürzte Tabelle hier stehen:

Deviationswinkel der Seeachse:	Größe der gemessenen Winkel in Graden:												
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
10′	Correction der gemessenen Winkel	0	0″	0″	0″	1″	1″	1″	1″	1″	2″	2″	3″	3″
15′		0	0″	1″	1″	1″	2″	2″	3″	3″	4″	5″	6″	7″
20′		0	1″	1″	2″	3″	3″	4″	5″	6″	7″	9″	10″	12″
25′		0	1″	2″	3″	4″	5″	6″	8″	9″	11″	13″	16″	19″
30′		0	2″	3″	4″	6″	8″	9″	11″	13″	16″	19″	23″	27″
35′		0	2″	4″	6″	8″	10″	12″	15″	18″	21″	26″	31″	37″

Ist z. B. die Sehachse des Diopters um 10′ gegen die Ebene des Gradbogens geneigt, so wird nach dieser Tabelle ein Winkel von 120°, den der Index angiebt, um 3″ falsch, nehmlich zu groß u. s. w.

d) Der Parallelismus der farbigen Gläser, welche man bei Sonnenbeobachtungen zur Blendung ihres starken Lichtes anzuwenden pflegt, kann folgendermaßen untersucht werden. Sind nehmlich diese Gläser nicht vollkommen parallel, so bleiben die auffallenden Lichtstrahlen nicht parallel zu den auf der andern Seite durchgehenden, wie in der Optik gezeigt wird. In letzterm Falle kann sich also auch der sogenannte Indexfehler für einen entfernten Punkt nicht gleich bleiben, wenn man einmahl ohne die gefärbten Gläser, sodann mit denselben das dioptrische und katoptrische Bild im Sehefeld des Diopters zur Bedeckung bringt. Man kann den Indexfehler für den Mond zuerst ohne Blendegläser, sodann mit denselben einzeln, so wie in Combinationen zu zweien u. s. w. aufsuchen. Bleibt nun der Indexfehler, welcher auch = o seyn kann, bei Anwendung der farbigen Gläser nicht derselbe, wie er sich ohne dieselben zeigte, so sind sie keine vollkommenen Parallelgläser. Weil es immer sehr schwer halten wird, sie alle ganz geometrisch genau zu erhalten, da schon eins derselben in so hoher Vollkommenheit sich selten findet, so ist der beste Rath dieser, daß man den Indexfehler, den diese farbigen Gläser, einzeln und in Verbindung, für die Sonne und den Mond geben, genau bemerke, und dann bei Winkelmessungen, wobei diese Körper zu Richtpunkten dienen, gehörig in Rechnung bringe. Wendet man nehmlich jederzeit immer dieselben Gläser auf das Object an, für welches man den von ihnen erzeugten Indexfehler genau beobachtet hat, so kommt dadurch kein erheblicher Irrthum in die gemeßnen Winkel.

Wird bei astronomischen Beobachtungen bloß das

Sonnenbild gebraucht, z. B. um den Sonnendurchmesser oder die Sonnenhöhe mit Zuziehung des künstlichen Horizontes zu finden, so halte ich für das Rathsamste, bloß ein dunkelfarbiges kleines Parallelglas vor das Ocular des Fernrohrs zu setzen.

Noch ausführlichere Erörterung der dem Sextanten eigenthümlichen, in diesem §. angezeigten, Fehler enthält Bohnenberger's Schrift über die geograph. Ortsbest. Das Nützlichste und Brauchbarste über diesen Gegenstand aber glaube ich hiermit gegeben zu haben.

§. 79.

Historische Erwähnung einiger anderer Winkelmesser mit und ohne Spiegel.

Nach der wirklich höchst schätzbaren Erfindung des Hadleyschen Sextanten (zuerst Octanten) wurde von dem berühmten Astronom Mayer ein Vollkreis mit reflectirenden Spiegeln, und zugleich mit einer Vorrichtung zum Repetiren der Winkel versehen, in Vorschlag gebracht. Borda in Paris brachte an diesem Reflexionskreis noch einige Verbesserungen an, und beschrieb sein von dem Künstler Lenoir angefertigtes Instrument in der oben citirten Schrift: Description et usage du cercle de reflexion etc. — Ein solcher Mayer-Bordascher Spiegelkreis würde außer dem Vortheil eines Sextanten, nehmlich der Entbehrlichkeit eines Stativs, noch den in sich schließen, daß durch die Repetition einer Winkelmessung die Fehler der Theilung und Excentricität sich aufhöben; allein da dies Werkzeug schon eine bedeutende Größe und ein beträchtliches Gewicht erhält, so kann es zu sehr genauen Beobachtungen und sicherm Ablesen der Winkel eines Sta-

tivs und festen Standes nicht wohl entbehren; auch würde es nur für einen hohen Preis vollkommen herzustellen seyn. Man sieht also wohl ein, warum dasselbe nicht mehr in Aufnahme gekommen ist, und jetzt, so viel ich weiß, zu Lande nicht mehr gebraucht wird. Die Englische Marine bedient sich indessen des Spiegelkreises jetzt vorzugsweise zu astronomischen Beobachtungen auf der See. Ein 8zölliger, weniger kostbarer, Repetitionstheodolit giebt, wo nicht größere, doch gleiche Genauigkeit als ein Spiegelkreis, und übertrifft letztern ganz besonders in Hinsicht der Helligkeit der Bilder, wodurch die Schärfe im Visiren gewinnt. Wo man aber nicht so außerordentliche Annäherung, als die Repetition beabsichtigt, verlangt, da kann auch ein gut gearbeiteter Sextant ein genügendes Resultat gewähren.

Ein dem Sextant, in Construction und Theorie, sehr ähnliches kleines Spiegelwerkzeug ist der von dem Englischen Oberst Douglas erfundene reflectirende Halbkreis (the Semicircle reflecting), hier zu Lande unter dem vagen Namen Reflector bekannt. Er unterscheidet sich hauptsächlich dadurch vom Sextant, daß mittelst desselben die Winkel nicht bloß in Gradmaß (der gewöhnlichen Angabe nach bis zu 2′ genau) gemessen, sondern auch zugleich geometrisch auf einen Plan (Papier) verzeichnet werden können. Zu schnellen militärischen Aufnahmen, wobei eben keine große Schärfe verlangt wird, ist dieser kleine leicht transportable Winkelmesser und zugleich Transporteur mit aufgestochenen verjüngten Maßstäben wirklich recht brauchbar und empfehlungswerth. Zu etwas genauern Triangulirungen und Vermessungen hingegen ist ihm, da er noch mehreren Fehlern als ein Sextant ausgesetzt ist, und nach meinen Beobachtungen die Winkel gewöhnlich nicht viel genauer als auf 3 bis 4′ giebt, ein Dosensextant und der Meßtisch vorzuziehen.

Man findet diesen Reflector gut beschrieben und die Theorie desselben erörtert in der Schrift: das militärische Aufnehmen, von Decker, Preuß. Major ꝛc. Berlin, 1816. Der Verfasser empfiehlt den Reflector und die kleine Handbouſſole von Schmalkalder mit besondrer Vorliebe und fast ausschließlich zu militärischen Aufnahmen.

Man hat auch in frühern und neuern Zeiten versucht, die Winkel durch ihre Sehnen, Sinus und Cosinus oder auch Tangenten, folglich durch gerade Linien zu messen, und demgemäß eigne Winkelmesser zu construiren. So etwas findet man schon in einer alten Schrift von Gutschoven im J. 1674 angegeben, nehmlich einen Quadranten, dessen innere Fläche ein sogenanntes rete trigonometricum (trigon. Netz) überzieht, wovon 90 zu dem einen Halbmesser parallele gerade Linien die Sinus, 90 andere zum andern Halbmesser parallele Linien aber die Cosinus der Grade von 0° bis 90° in Beziehung auf die Länge des Sin. tot. vorstellen u. s. w. Nachricht von einem Kunstwerk der Art ertheilt Kästner in seinen geometr. Abhandl. 2te Samml. S. 603. — Diesem sehr ähnlich sind der vom ältern Tob. Mayer angegebene und von dessen Sohn in seiner pract. Geom. B. I. S. 408 beschriebene Recipiangle, ingleichen die sogenannten Cathetometer, welche mehrmahls von Neuem in Anregung gebracht und als neue Erfindungen bald unter diesem bald unter jenem Namen dem Publikum producirt worden sind. Sogar in den jetzigen Zeiten, wo wir bereits die vollkommensten Winkelmesser an den Repetitionskreisen besitzen, hat sich der Erfindungsgeist in jener Art thätig bewiesen, und durch seine Schöpfungen nicht bloß eine bequemere und genauere Winkelmessung, sondern auch die Ersparung trigonometrischer Rechnungen möglich machen wollen. Eine vollständige Geschichte aller dieser vergebli-

chen Versuche würde hier zu nichts nützen. Einige solcher Erpfindungen mögen dem wirklichen Eifer für die Wissenschaft, andere auch wohl nur dem Verlangen, etwas Neues erfunden zu haben, ihre Entstehung und ihr kurzes Daseyn verdanken. Jeder denkende Leser wird ohne weitere Erklärung begreifen, warum gerade Linien zu einer genauen sichern Winkelmessung sich nicht so gut wie Kreisbogen eignen, warum folglich jene unzuverläßigen Winkelmesser vom mathematischen Publikum nicht angenommen worden. Eben dieser Tadel der Unbrauchbarkeit trifft auch einige dem Sextant nachgekünstelte Spiegelwerkzeuge.

Ein genau eingetheilter Kreisbogen, eine um dessen Centrum bewegliche Alhidade mit Nonius und mit gemeinem oder besser Fernrohr-Diopter werden immer die Hauptelemente eines guten Winkelmessers bleiben. Daher können die oben beschriebenen Winkelmesser nebst dem Meßtisch, auf welchen die Sehewinkel geometrisch construirt werden, allen Winkelmessungen theils der niedern theils der höhern Erdmessung vollkommen Genüge leisten. Es ist möglich, daß jene Werkzeuge im Fortschritt der Zeit noch größere Vollkommenheit, besonders in Hinsicht der Theilung, erlangen werden; allein ein ganz neuer verbesserter Winkelmesser, der in Hinsicht der erwähnten Hauptelemente von den jetzt gebräuchlichen abwiche, läßt sich kaum gedenken.

Wie sich auch vermittelst eines guten Meßtisches ein Winkel im Felde nach Gradmaß mit einer erträglichen Genauigkeit bis auf eine oder einige Minuten bestimmen lasse, werden wir in der vierten Abtheilung sehen.

Zum Auftragen der Winkel auf Papier bediene man sich, wenn die Planzeichnung nur einige Genauigkeit verlangt, statt des gemeinen Transporteurs lieber eines vollkommneren, welcher aus einem Vollkreis be-

steht; um das richtig bestimmte Centrum desselben bewegt sich eine Alhidade mit Noniusinder; diese trägt am Ende zwei Aerme mit scharfen Spitzen, welche über den Limbus hinaus übergelegt werden können, um einen gewissen Winkel auf dem untergelegten plan ausgespannten Papier mit feinen Punkten abzustecken u. s. w. Ich besitze einen bequemen Goniograph der Art, welcher die Winkel bis auf 2′ genau aufs Papier absetzt.

Instrumente zum Nivelliren

im engern Sinne des Worts.

Zum Nivelliren (Wasserwägen) in der beschränkten Bedeutung, wie man diesen Ausdruck gewöhnlich nimmt, gehören einige besondere Werkzeuge, nehmlich:

a) genau eingetheilte geradlinigte Maßstäbe mit verschiebbaren Zielscheiben; b) eine sogenannte Wasserwaage, Nivellirwaage, welche man schlechtweg auch wohl Niveau heißt. Jede Nivellirwaage hat die Absicht, eine Ziel-Linie oder Visirlinie zu verschaffen, welche in der durch einen Punkt, auf oder über der Erdoberfläche, gelegten Horizontalebene liegt, nehmlich eine scheinbare Horizontale ist. Zu dieser Absicht ließen sich einige der vorher beschriebenen Winkelmesser, z. B. der Bordasche Kreis oder der Theodolit, an welchen ein Fernrohr mit Libelle versehen ist, recht gut gebrauchen.

Indessen hat man der Wichtigkeit und Bequemlichkeit des Geschäftes wegen für das Nivelliren besondere Instrumente ausgedacht. Wir wollen uns hier, wie Mayer in seiner pract. Geom. thut, mit der Beschreibung der vielen verschiedenen zum Theil ganz zwecklosen unbrauchbaren Abänderungen, welche dies Werkzeug vom Erfindungsgeist verschiedener Zeiten erfahren hat, und welche im Wesentlichen auf Eins hinauslaufen, gar nicht aufhalten, sondern sogleich ohne Umschweif das Beste der Art kennen lernen. Es giebt zwei Hauptarten der Nivellirwaage: eine ohne Libelle, gewöhnlich mit gemeinen Dioptern ohne Fernrohr, zu weniger genauem Nivelliren; eine andre mit Libelle und Fernrohr, vorzugsweise Niveau genannt, zu genauern Bestimmungen der Höhenunterschiede verschiedener Punkte auf der Erde, welche das Nivelliren eigentlich bezweckt.

§. 80.

Nivellirwaage ohne Libelle, gemeine Wasserwaage, (Kanalwaage). (Fig. 44.).

AB ist ein kupfernes cylindrisches Rohr, an beiden Enden rechtwinklicht umgebogen; in diese umgebogenen Enden werden zwei Glasröhren D, E eingesetzt und so luftdicht eingekittet, daß das Ganze eine zusammenhängende communicirende Röhre bildet. Die Unterstützung und das Stativ dieser Wasserwaage können wie bei einem Meßtisch eingerichtet seyn, dergestalt, daß man sie nach Belieben erhöhen, erniedrigen und herumdrehen kann.

Beim Gebrauch gießt man reines oder mit einer Farbe tingirtes Wasser in die communicirende Röhre, ungefähr so viel, daß zwei Drittel der Glasröhren D, E

damit erfüllt werden. Das Wasser steigt in beiden Röhren gleich hoch, d. h. so, daß eine gerade Linie MN durch die beiden höchsten Standpunkte gelegt, eine Horizontallinie wird. Ein Visirstrahl nach dieser Richtung wird daher auch eine Horizontale, wobei jedoch wegen der Unvollkommenheit, in solcher Art zu visiren, etwas gefehlt werden kann. Um das vollkommnere Visiren zu erleichtern, kann man noch an den Glasröhren auf irgend eine Art verschiebbare Dioptern anbringen, das eine mit einem Fadenkreuz, das zweite mit einem sehr feinen Loch als Ocular. Indem man nun die Visirlinie der Dioptern über die beiden höchsten Wasserstände einrichtet, so wird sie horizontal u. s. w. Uebrigens lassen sich diese Dioptern leicht so einrichten, daß ein Vorwärts- und Rückwärts-Visiren möglich wird.

Die beiden Glasröhren müssen sehr hell und durchsichtig, auch von gleichen Dimensionen seyn. Denn, streng genommen, kann man die beiden Wasseroberflächen der Erfahrung gemäß nicht als vollkommen horizontal betrachten; haben die cylindrischen Röhren einen kleinen Durchmesser, so steht die Flüßigkeit an den Wänden der Röhre sehr merklich höher als in der Mitte oder in der Achse der Wassersäule, wenn wir uns diese vertikal gedenken; daher erscheint die ganze Oberfläche der Flüßigkeit in der Mitte concav, eine Folge der Anziehungskraft des Glases. — Wollte man zur Füllung des Rohres Queckfilber anwenden, so würde eine entgegengesetzte Wirkung Statt finden, nehmlich die Oberfläche desselben convex erscheinen. Nach den von Lavoisier und Laplace über das Barometer angestellten Versuchen kann jedoch das Queckfilber, wenn man es lange genug in einer Glasröhre kochen läßt, die convexe Gestalt seiner Oberfläche verlieren und selbst eine concave annehmen, indem durch das anhaltende Kochen die dünne

wäßrige Zwischenlage entfernt wird, welche die Innenseite der Glasröhre bedeckt, und die gegenseitige Anziehung des Queckſilbers und Glaſes hindert.

Wären nun beide Röhren D, E ungleichweit, so müßte nach den Geſetzen der Erſcheinungen, welche bei Haarröhren von ungleichen Weiten Statt finden, auch die Waſſerhöhenſtände in beiden Röhren ungleich ſeyn. Die Phyſik lehrt, daß ſich die Waſſerſtände in beiden cylindriſchen Röhren umgekehrt verhalten werden, wie die Durchmeſſer dieſer Röhren oder vielmehr der Ringe, welche die höchſten Waſſerſtände begrenzen. So begreift man, warum dieſe Röhren ſo nahe wie möglich gleiche Durchmeſſer haben und zwar am beſten vertikal ſtehen müſſen; wenn man dadurch eine richtige horizontale Abſehenlinie erlangen will. Den vertikalen Stand der Röhren D, E und den horizontalen des Rohres AB kann man ſehr annähernd durch ein am letztern aufgehängtes Bleiloth (Senkblei) erhalten.

Die Concavität der Waſſeroberflächen in beiden Röhren macht die horizontale Viſirlinie vermittelſt derſelben immer etwas zweifelhaft, da ſie eigentlich durch die unterſten Punkte der beiden concaven Waſſerflächen gehen ſollte, welche ſich nicht wohl abſehen laſſen. Nimmt man dafür die Seitenbegrenzungen, welche in einer geringen Entfernung dem Auge als dunkle Linien erſcheinen, zur Richtſchnur, ſo erhält man jedoch einen Grad der Genauigkeit, wie ihn der beſchränkte Gebrauch der Kanalwaage erheiſcht.

Man muß dafür ſorgen, daß zwiſchen das Waſſer, womit die communicirende Röhre gefüllt wird, während des Eingießens und während des Transports von einem Ort zum andern keine Luftblaſen kommen, da ſolche den horizontalen, gleich hohen, Stand der Waſſeroberflächen ſtören können. Wenn nehmlich die beiden Säulen der Flüßigkeiten in D und E nicht gleiches ſpe-

zifisches Gewicht haben, so werden sie zwar im Gleichgewicht, aber ihre Oberflächen nicht gleich hoch, horizontal, stehen. Dies muß aber immer geschehen, wenn die Röhre nach der einen oder andern Seite hin Luftblasen in sich schließt. Sollten dergleichen in das Rohr AB gekommen seyn, so wird man durch eine schickliche Neigung desselben bewirken, daß sie sich über das Wasser erheben. Im Uebrigen bedarf die Kanalwaage keiner besondern Berichtigung.

Die Länge des Rohrs AB kann ungefähr 2 Fuß, die Weite der Glasröhren D, E gegen $\frac{3}{4}$ Zoll betragen.

Es ist gar nicht schwer, Nivellirinstrumente auszusinnen, welche der eben angezeigten Kanalwaage in Hinsicht ihrer nur mittelmäßigen Genauigkeit gleich kommen. Von dieser Art ist das Nivellirlineal, welches Bugge in seiner Anleit. zum Feldmessen, übers. von Tobiesen — angiebt. Wir wollen nun ohne Weiteres gleich das vollkommenste Werkzeug zum Nivelliren kennen lernen.

§. 81.

Nivellirwaage mit Fernrohr und Libelle, Niveau à lunette et à bulle d'air. (Fig. 45.)

Die wesentlichen Hauptstücke dieses Instrumentes sind ein achromatisches etwa 18zölliges Fernrohr AB, in dessen Brennpunkt ein Fadenkreuz sich befindet, und eine mit demselben verbundene Röhrenlibelle, welche sich parallel zur Achse des Fernrohrs stellen läßt, dergestalt, daß die Visirlinie in der Richtung jener Achse horizontal wird, wenn die Luftblase zwischen ihren Zeichen in der Mitte der Libelle steht.

Das Fernrohr wird von zwei Trägern T unterstützt, welche oben die Form eines Y haben, und wel-

che daher von den Engländern insgemein mit dem Namen Y's bezeichnet werden. In diese Y's wird das Fernrohr mit seinen zwei genau geschliffenen glockenmetallenen Ringen, wie sonst in runde Pfannen, eingelegt. Die innern Seiten der Yförmigen Pfannen sind gleichsam Tangenten der cylindrischen Ringe am Fernrohr; auf einer solchen Unterlage liegt dasselbe fester als in runden Pfannen, und läßt sich sehr sanft und stetig um seine Achse drehen.

Die untern Enden der Träger stehen senkrecht auf einer starken Stange; der eine geht mit einem prismatisch abgearbeiteten untern Stück durch die Stange, und läßt sich mittelst eines geränderten Knopfes G erhöhen oder erniedrigen, um das Instrument waagerecht zu stellen.

Die Libelle wird mit dem Fernrohr am einen Ende mittelst eines Scharnieres, am andern mittelst einer Fingerschraube befestigt, so daß der Beobachter es in seiner Gewalt hat, dieselbe gegen das Fernrohr höher oder tiefer zu stellen.

Mit der Stange, welche die senkrechten Träger hält, steht eine konische stählerne Achse R in fester Verbindung. Diese Achse läßt sich in einer vollkommen anschließenden Hülse umdrehen, welche mit einem Trépied von drei geschweiften starken Füßen ein Ganzes ausmacht. Der Trépied ist mit drei Stellschrauben (Fußschrauben) versehen. Diese gehen in aufgeschlitzten Schraubenmuttern, welche sich durch rändirte Schraubenknöpfe mehr oder weniger verengen, und gegen die Stellschrauben beliebig anpressen lassen. Das Ganze wird auf ein sehr festes Gestell gesetzt, wozu man ein Stativ nach neuerer Art mit unverrückbar vereinigtem Gebälk (Leisten) anwenden kann. Ist die Achse R erst annähernd vertikal auf der Unterlage, so kann ihr vertikaler Stand durch die Stellschrauben des Dreifußes noch weiter berichtigt werden.

Nach sonst üblicher Weise ruht das Niveau, wie ein Astrolabium oder ein Meßtisch, auf einem Stativ mit drei beweglichen Füßen. Es leuchtet aber ohne weitere Erklärung ein, daß die hier angegebene Einrichtung sich besser zu einem festen sichern Stand des Niveau's eignet, worauf bei sehr genauen Nivellements so ungemein viel ankommt.

Was die gute Beschaffenheit der Libelle anlangt, so ist im §. 68. das Nöthige bemerkt worden. Wird sie mit einem Fernrohr zur Horizontalstellung seiner Sehachse in Verbindung gesetzt, so ist sie insgemein in Messing gefaßt (montirt); oben hat die Faßung zwei Oeffnungen, um den Stand der etwas langen Luftblase zwischen ihren Zeichen, die durch eingeschnittene oder eingeätzte Theilstriche in gleichen Abständen von beiden Enden mit gleichen Nummern bezeichnet sind, bemerken zu können.

Das Fadenkreuz im Fernrohr läßt sich durch besondere Schrauben in der Richtung seiner Achse und senkrecht gegen dieselbe verrücken, um den Durchschnittspunkt der Fäden genau in die Umdrehungsachse des Rohrs und der glockenmetallenen Ringe zu bringen. Das Fernrohr hat zwei Auszüge; die Deutlichkeit eines entfernten Objectes erlangt man durch Herausziehen des Objectivrohres, die Deutlichkeit des Fadenkreuzes hingegen durch Herausziehen des Ocularrohres.

Die Y's haben oben in Scharnieren bewegliche halbringförmige Halsbänder, um das eingelegte Fernrohr fest zu halten, oder erforderlichen Falles herausnehmen zu können.

Was sonst noch vom richtigen Bau dieses Niveau's gesagt werden könnte, wird der Leser nach der Figur gewiß selbst ermessen.

§. 82.

Berichtigung oder Ajustirung (Verification) des Niveau's.

Diese Berichtigung besteht darin, das ganze Niveau bei einer Operation so einzurichten,

a) daß die Sehachse des Fernrohrs, die durch den Mittelpunkt des Fadenkreuzes geht, genau mit der Umdrehungsachse des Rohres oder vielmehr seiner glockenmetallenen Ringe zusammenfällt;

b) daß die Libelle parallel zu dieser Achse wird, so nehmlich, daß diese nach jedem Azimuth horizontal steht, wenn die Luftblase in der Mitte zwischen ihren Zeichen bleibt;

c) daß endlich die Umdrehungsachse R auf ihrer Unterlage vertikal gegen den scheinbaren Horizont steht, und die Sehachse bei ihrer Azimuthalbewegung um die Achse R horizontal bleibt.

Um die Bedingung a zu erfüllen, stelle man das ganze Instrument auf eine feste Unterlage und visire durch das Fernrohr auf einen entfernten scharfbegrenzten deutlichen Punkt, so daß derselbe vom Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes gleichsam bedeckt wird. Hierauf drehe man das Fernrohr, welches mit seinen geschliffenen Ringen in den Y's liegt, allmählig um seine Achse; bedeckt hierbei der Mittelpunkt des Fadenkreuzes überall den entfernten Punkt, so ist die Lage des Fadenkreuzes gegen die Umdrehungsachse der cylindrischen Ringe die richtige. Im entgegengesetzten Falle geschieht die Berichtigung durch drei kleine stählerne Schrauben, welche hierzu am Ocular besonders angebracht sind, so lange, bis bei jeder Drehung des Fernrohrs der Mittelpunkt seines Fadenkreuzes ein und denselben entfernten Punkt deckt. Der Grund dieser Correction leuchtet ein; ist sie ein-

mahl richtig vollbracht, so ist eine Verrückung des Fadenkreuzes bei gehöriger Vorsicht nicht leicht weiter zu besorgen. Indessen kann man von Zeit zu Zeit diese Richtigkeit von neuem untersuchen.

Um b) die parallele Lage der Libelle mit der Achse des Fernrohrs zu prüfen und zu berichtigen, welches bei genauen Nivellements eine Hauptsache ist, verfahre man also: Die Träger, Y's, stelle man so, daß einer derselben senkrecht über einer der Fußschrauben steht; die Visirlinie des Fernrohrs sey jetzt nach einer gewissen Himmelsgegend, z. B. von Nord nach Süd, gerichtet. Man bringe durch Erhöhung oder Erniedrigung jener Fußschraube die Luftblase in die Mitte der Libelle oder doch nahe dahin; nehme dann das Fernrohr aus seinen Y's heraus, und lege es in umgekehrter Richtung wieder ein, nehmlich den vorher nördlich gelegenen geschliffenen Ring in das südlich stehende Y u. s. w. Geht jetzt die Luftblase von ihren Zeichen nach dem einen Ende der Libelle hin, wie dies gewöhnlich geschieht, so ist die Achse des Fernrohrs nicht horizontal, auch nicht parallel zur Libelle. Man verbessere den Fehler zum Theil vermittelst der Fußschraube, zum Theil mittelst der Fingerschraube an der Libelle; vergl. §. 69. — Es ist rathsam, anfänglich nur wenig mit der Libellenschraube zu corrigiren, weil wahrscheinlich der Fehler größtentheils in der Ebene liegt, worauf das Niveau ruht; daher auch die Correction jetzt noch größtentheils mit der Fußschraube bewirkt wird. Dies Umwenden des Fernrohrs und Einstellen der Libelle muß so oft erneuert werden, bis die Luftblase zwischen ihren Zeichen bleibt, wie man auch das Fernrohr einlegen mag. Der Grund dieser Berichtigung ist nicht schwer einzusehen.

Nach den erwähnten zwei Hauptcorrectionen ist die dritte c) nehmlich die Berichtigung der Umdrehungsachse und der auf ihr senkrechten Ebene, ohne viel Mühe

weiter zu vollbringen. Man befestigt nehmlich das Fernrohr vermittelst der Halsringe auf seinen Y's, und dreht die vertikale Achse R so weit, um 180°, herum, daß das vorher nördliche Ende des Fernrohrs nun südlich zu stehen kommt. Bleibt die Luftblase in der Mitte, so haben die Y's ihre richtige Lage; im entgegengesetzten Falle verbessert man die Hälfte des gefundenen Fehlers (Abweichung) durch die am untern Ende (Prisma) des einen Y angebrachte Kopfschraube, die zweite Hälfte durch die Fußschraube. Hat man auf solche Weise das Niveau in der Ebene von Süd nach Nord horizontal gestellt, so bedarf es noch einer Berichtigung der Ebene von Ost nach West. Man drehe also das Niveau um die Achse R nach dieser Richtung, und verbessert dann, wenn die Libelle nicht gehörig einspielt, die Abweichung zum Theil durch die östliche, zum Theil durch die westliche Fußschraube. Ist die Berichtigung so weit gediehen, daß beim Umdrehen des Fernrohrs und seiner Libelle um die Achse die Luftblase immer zwischen ihren Zeichen bleibt, so steht das ganze Instrument in der zum Nivelliren erforderlichen Lage.

Niveau's von der hier beschriebenen Construction, welche auf jeden Fall die sonst gebräuchlichen an Genauigkeit weit übertreffen, werden hier zu Berlin in Pistor's Werkstatt sehr vollkommen angefertigt. Das Fernrohr hierzu ist 18zöllig, der Werth der Abtheilungen zwischen je zwei geäzten Theilstrichen der Libelle ungefähr gleich 5 Sek. im Bogen, so daß also das Fortrücken der Luftblase um sechs solcher Theilstriche eine halbe Minute des Neigungswinkels anzeigt; eine Genauigkeit, welche zu den feinsten Nivellements vollkommen ausreicht.

Auf eine ähnliche Art, wie hier am Niveau die Berichtigung des Fadenkreuzes gegen die Achse des Fernrohrs und der Libelle gegen dieselbe angezeigt wor-

den, geschieht solche auch an Winkelmessern, deren Fernrohr mit einer Libelle in Verbindung steht, um eine horizontale Visirlinie zu erhalten.

Niveau's nach andrer Bauart, z. B. mit zwei Fernröhren, oder nach Picard mit einem Bleiloth statt der Libelle u. s. w. kann der Leser, welchem daran etwas liegt, in verschiedenen Schriften, z. B. in Mayer's pract. Geometrie, in Adams geom. und graph. Versuchen ꝛc. nachsehen.

Einige andere nützliche Bemerkungen über den richtigen Gebrauch des Niveau's sollen in der fünften Abtheilung, wo vom practischen Nivelliren gehandelt wird, nachfolgen. Das hier Gesagte beruht auf einfachen Sätzen der Elementargeometrie, und wird durch Betrachtung eines Nivellirinstrumentes erst recht anschaulich.

§. 83.

Eingetheilte Maßstäbe und Zielscheiben zum Nivelliren.

An den Punkten auf der Erdoberfläche, deren Höhenunterschied durch Nivelliren gefunden werden soll, müssen senkrecht gerade Stangen mit Signalen aufgestellt werden, auf welche die durch ein Niveau erhaltene horizontale Visirlinie gerichtet wird. Hierzu braucht man insgemein viereckige prismatische Stäbe von gutem festen Holze, sehr gerade bearbeitet, etwa 10 Fuß lang und 4 Zoll nach allen Seiten breit, nebst einer Zielscheibe, welche sich längs der Stange auf und abwärts bewegen und an jeder Stelle derselben befestigen läßt.

Jeder Nivellirstab ist von unten nach oben in Fuße, Zolle und Linien oder nach irgend einem andern Maße eingetheilt; unten ist der Stab mit Eisen beschlagen;

mit diesem flachen Ende wird er auf den Boden oder noch besser auf das oben ebene Ende eines in die Erde eingetriebenen Holzpfahls senkrecht aufgesetzt, so daß der Nullstrich der Theilung mit dem Punkt über der Erde, dessen Erhöhung oder Erniedrigung über einen andern gesucht wird, so genau wie möglich zusammenfällt. Um aber den Stab vollkommen senkrecht aufzustellen, welches bei Arbeiten der Art unerläßlich ist, bedient man sich eines Bleilothes auf die bekannte Weise.

Die Zielscheibe hat die Form eines Quadrats, etwa 1 Fuß ins Gevierte; sie wird entweder zur Hälfte schwarz, zur Hälfte weiß angestrichen, so daß die Scheidungslinie zwischen Schwarz und Weiß zur Ziellinie dient, oder man theilt sie durch zwei Senkrechte in vier gleiche Quadrate, wovon zwei entgegengesetzte weiße, die zwei andern hingegen schwarze Farbe erhalten, so daß hier der Mittelpunkt der quadratischen Scheibe zum Zielpunkt dient. Die Abmessungen der Zielscheiben an beiden Nivellirstangen müssen völlig gleich gemacht werden; in diesem Falle hat man nicht nöthig, beim Nivelliren die Höhen vom untern Ende einer Stange bis zum Mittelpunkt seiner Zielscheibe zu nehmen, sondern nur die Höhen, welche der untere Rand einer jeden Zielscheibe an seinem eingetheilten Rand anzeigt; sonst kann man auch zu dieser Höhe die halbe Breite jeder Scheibe addiren u. s. w. Diese Scheiben kann man aus dünnen Holzplatten oder noch besser aus dünnem ebengeschlagenen Eisenblech machen. Um sie längs der Stäbe auf und abwärts bis auf einen gewissen Theilstrich bewegen und in diesem Stande befestigen zu können, lassen sich mancherlei Einrichtungen gedenken. Nach der gewöhnlichen bekannten Weise läßt sich die Zielscheibe mittelst einer Hülse und einer Schnur, welche oben über eine Rolle läuft, durch Anziehen oder Nachlassen derselben, höher oder tiefer am Nivellirstab stel-

len; durch das Anbinden der Schnur an einem Stift des Stabes wird dieselbe in einer bestimmten Lage erhalten. Besser wird es seyn, wenn man sie mit einem Stab (Lineal) in feste Verbindung setzt, diesen Stab in einer Fuge des größern Nivellirstabes verschiebbar macht, und durch eine Schraubenvorrichtung beide Stäbe zusammen befestigen kann, um die Zielscheibe an einer gewissen Stelle zu erhalten u. s. w.

Ich will in ein weiteres Detail über diesen an sich sehr leichten Gegenstand nicht eingehen. Eine andre Vorrichtung der Art mit zwei Zielscheiben an jedem Nivellirstab kann der Leser in Mayer's pract. Geom. 3r Bd. S. 588. nachsehen.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schulze-Montanus, Karl August,

Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erd-Messung mit ebener und sphärischer Trigonometrie auch Beschreibung der neuern brauchbaren Meß instrumente
Bd.: 1

Berlin 1819

Math.p. 744 k-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137756-8